

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

# **Řešení modelových úloh souvisejících se stabilitou svahů**

## **Modelling Problems in Slope Stability**

## Zadání diplomové práce

Student:

**Bc. Jan Cenek**

Studijní program:

N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103T031 Výpočetní matematika

Téma:

Řešení modelových úloh souvisejících se stabilitou svahů  
Modelling Problems in Slope Stability

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

Prvotním cílem práce je řešení úlohy lineární pružnosti pomocí metody konečných prvků pro specifickou 2D geometrii znázorňující profil svahu. Následně student provede analýzu vypočteného napěťového pole na základě vhodně zvoleného plastického kritéria za účelem primárního určení zóny, ve které může dojít k sesuvu půdy. V další fázi práce již bude plastické kritérium přímočaře zahrnuto do modelu, což povede na řešení nelineárního problému a přesnějšímu určení zóny poškození. Poslední a volitelnou částí práce je provedení parametrické studie problému vedoucí k určení tzv. limitního parametru pro předepsané zatížení. Jedná se o důležitý bezpečnostní parametr pro inženýrskou práci. Pro implementaci problémů a grafické znázornění výsledků je doporučen software Matlab.

Seznam doporučené odborné literatury:


J. Nečas, I. Hlaváček: Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles. SNTL, Praha, 1983.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Stanislav Sysala, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2018

Datum odevzdání: 30.04.2019

  
prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



  
prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární  
prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 15. května 2020

.....

Souhlasím se zveřejněním této diplomové práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 Studijního a zkušebního řádu pro studium v magisterských programech VŠB-TU Ostrava.

V Ostravě 15. května 2020

.....

Rád bych na tomto místě velmi moc poděkoval panu Mgr. Stanislavu Sysalovi Ph.D. za velmi přínosné rady, veškerý věnovaný čas a nutnou dávku trpělivosti, bez něj by tato práce nevznikla.

## Abstrakt

Práce je zaměřena na analýzu a řešení statických úloh lineární pružnosti a zjednodušené pružně-perfektní plasticity. Jsou uvedeny klasické a variační formulace těchto úloh a je diskutována jejich řešitelnost. V případě plastického modelu jsou uvažovány von Misesovo a Drucker-Pragerovo kritéria poškození. Diskretizace problémů je založena na metodě konečných prvků vyšších řádů. Numerický příklad je zaměřen na vyhodnocení napětového stavu v okolí svahu, který je modelován ve 2D pomocí úlohy rovinné deformace. Výpočet je proveden pomocí lineární pružnosti a napětový stav je vyhodnocen pomocí Drucker-Pragerova kritéria. Implementace je provedena v Matlabu.

**Klíčová slova:** stabilita svahu, lineární pružnost, perfektní plasticita, existence a jednoznačnost řešení, metoda konečných prvků

## Abstract

This thesis is focused on analysis and solution of static problems based on linear elasticity and simplified elastic-perfect plasticity. Classical and variational settings of these problems are presented and their solvability is discussed. In the case of the plastic model, von Mises and Drucker-Prager yield criteria are considered. Discretization of the problems is based on the higher-order finite element method. A numerical example is focused on the evaluation of the stress state around the slope, which is modeled in 2D under the plane strain assumptions. The computation is performed using linear elasticity and the stress state is evaluated using the Drucker-Prager criterion. The implementation is done in Matlab.

**Key Words:** slope stability, linear elasticity, perfect plasticity, existence and uniqueness of solutions, finite element method

## OBSAH

Seznam obrázků	8
Použité symboly	9
1. Úvod	10
2. Pomocný aparát	11
2.1. Tenzory 2. řádu a 4. řádu	11
2.2. Vybrané výsledky z variačního počtu	12
2.3. Sobolevovy prostory funkcí	14
3. Klasická formulace úloh lineární pružnosti a perfektní plasticity	16
3.1. Obecné schéma problému	16
3.2. Operátor $T_B$ pro úlohu lineární pružnosti	16
3.3. Operátor $T_B$ pro abstraktní pružně-perfektně plastický model	18
3.4. Operátor $T_B$ pro model s von Misesovým kritériem	19
3.5. Operátor $T_B$ pro model s Drucker-Pragerovým kritériem	22
4. Slabá (variační) formulace úloh v posunech	28
4.1. Odvození slabé formulace a principu minima potenciální energie	28
4.2. Slabá formulace úlohy lineární pružnosti	29
4.3. Poznámky k řešitelnosti pružně-perfektně plastického modelu	30
5. Úloha rovinné deformace	32
6. Diskretizace úlohy rovinné deformace	34
6.1. Ritzova metoda pro lineární pružnost	34
6.2. Ritzova metoda u perfektní plasticity	35
7. Metoda konečných prvků lagrangeova typu pro 2D problém	36
8. Numerický příklad	43
8.1. Experiment 1	43
8.2. Experiment 2	45
9. Závěr	48
Literatura	49

## SEZNAM OBRÁZKŮ

3.1 Znázornění Von Misesova kritéria	19
3.2 Znázornění Drucker-Pragerova kritéria	22
3.3 Schéma projekce na Drucker-Pragerův kužel za zjednodušujícího předpokladu $\mathbb{C} = \mathbb{I}$ .	23
5.1 Schéma úlohy rovinné deformace	32
7.1 Příklad triangulace oblasti $\Omega$	36
7.2 Referenční trojúhelník pro $P_1$ prvek	37
7.3 Referenční trojúhelník pro $P_2$ prvek	37
7.4 Izoparametrická transformace pro $P_1$ element	38
7.5 Izoparametrická transformace pro $P_2$ element	38
7.6 1-bodová Gaussova kvadratura	40
7.7 7-bodová Gaussova kvadratura	40
8.1 Schéma modelu	43
8.2 Zóna poškození (červeně) pro $\lambda = 1$	44
8.3 Zóny poškození (červeně) pro $\lambda = 2, 3, 4, 5$	45
8.4 Oblast poškození pro $P_1$ elementy (vlevo) a $P_2$ elementy (vpravo) s $\lambda = 2$	46
8.5 Profil deformovaného svahu pro $P_1$ elementy (vlevo) a $P_2$ elementy (vpravo)	46
8.6 Porovnání deviatorických částí deformací pro $P_1$ elementy (vlevo) a $P_2$ elementy (vpravo)	47
8.7 Porovnání volumetrických částí deformací pro $P_1$ elementy (vlevo) a $P_2$ elementy (vpravo)	47



## POUŽITÉ SYMBOLY

$\tau^D$	Deviatorická část matice $\tau$
$\tau^V$	Volumetrická část matice $\tau$
$\tau_s$	Symetrická část matice $\tau$
$\text{tr } \tau$	Stopa matice $\tau$
$\mathbb{I}$	Identický tenzor 4. řádu
$\mathbb{I}_D$	Deviatorická část identického tenzoru 4. řádu
$\mathbb{C}$	Izotropní elastický tenzor 4. řádu
$\Omega$	Oblast omega
$\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$	Hranice oblasti $\Omega$
$V$	Hilbertův prostor $V$
$a(\cdot, \cdot)$	Bilineární forma $a$
$L^2(\Omega)$	$L^2$ prostor
$\ \cdot\ _{0,2}$	Norma $L^2$ prostoru
$(\cdot, \cdot)_{0,2}$	Skalární součin $L^2$ prostoru
$W^{1,2}(\Omega)$	$W^{1,2}$ prostor
$\ \cdot\ _{1,2}$	Norma $W^{1,2}$ prostoru
$(\cdot, \cdot)_{1,2}$	Skalární součin $W^{1,2}$ prostoru
$\nabla f$	Gradient funkce $f$
$F$	Vektor objemových sil
$f$	Vektor povrchových sil
$u$	Pole posunutí
$\varepsilon$	Tenzor malých deformací
$\sigma$	Tenzor reprezentující Cauchyův tenzor napětí
$\lambda, \mu$	Laméovy koeficienty
$B$	Množina plasticky přípustných napětí
$T_B$	Operátor $T_B$
$V_h$	Diskretizovaný prostor $V_h$
$\mathcal{T}_h$	Triangulace oblasti $\Omega$

## 1. ÚVOD

Práce je zaměřena na analýzu a řešení úloh lineární pružnosti (elasticity) a zjednodušené pružně-perfektní plasticity. Cílem je vyhodnocení napětového stavu v okolí svahu, který je modelován ve 2D pomocí úlohy rovinné deformace.

Modely pružnosti a zjednodušené pružně-perfektní plasticity jsou statické, tzn. že neuvažují historii zatížení, a vycházejí z mechaniky kontinua, viz [7, 9, 10]. Úloha lineární pružnosti je základním a nejjednodušším modelem, pomocí kterého získáváme prvotní informaci o posunech, deformacích a napětovém stavu zkoumaného tělesa. Napětový stav obvykle vyhodnocujeme pomocí různých kritérií plasticity či poškození, které nám umožňují detekovat zóny, ve kterých by mohlo dojít k poškození tělesa. Z matematického hlediska se jedná o dobře probádaný problém, který má za rozumných předpokladů právě jedno řešení v posunech i v napětích.

Pružně-plastické modely jsou nelineární a plastické kritérium je již přímo součástí těchto modelů. Obvykle se jedná o časově závislé (kvazistatické) modely [3, 4], které umožňují studovat nevratné (trvalé) deformace. V práci se ale omezíme pouze na perfektně-plastické modely, které nezahrnují změkčení (softening), zpevnění (hardening) ani poškození (damage) materiálu. Budeme pracovat pouze s tzv. Henckyho modelem, což je zjednodušená (statická) verze pružně-plastického modelu, a budeme uvažovat von Misesovo a Drucker-Pragerovo kritérium. Pružně-plastické modely umožňují přesnější určení zóny poškození tělesa než pružné modely. Jejich matematická teorie je ale mnohem komplikovanější.

Práce je členěna do následujících kapitol. Ve 2. kapitole shrnujeme pomocný aparát k tenzorům 2. a 4. řádu, variačnímu počtu a Sobolevovým prostorům funkcí. V 3. kapitole přistoupíme ke klasické formulaci úloh lineární pružnosti a pružně-perfektní plasticity. Pozornost také věnujeme odvození explicitních tvarů konstitutivních operátorů a jejich derivací pro obě uvažovaná plastická kritéria. Ve 4. kapitole přistoupíme k odvození variační formulace úloh lineární pružnosti a perfektní plasticity v posunech. Budeme se také věnovat existenci a jednoznačnosti řešení. V 5. kapitole představíme předpoklady na rovinnou deformaci, která nám umožní provést dimenzionální redukci 3D problému na 2D problém. V 6. kapitole se budeme zabývat diskretizací úloh pomocí Ritzovy metody. Představíme také základní konvergenční výsledky vůči diskretizačnímu parametru. V 7. kapitole studujeme metodu konečných prvků, která je speciálním případem Ritzovy metody. Uvažujeme prvky Lagrangeova typu, které sestavíme pomocí izoparametrické transformace a vyskládáme elastickou matici tuhosti. V 8. kapitole prezentujeme numerický příklad znázorňujícím 2D profil svahu a řešíme jej pomocí úlohy lineární pružnosti. Napětový stav zkoumáme pomocí Drucker-Pragerova kritéria v závislosti na parametru zatížení. Kapitola 9 obsahuje závěrečné poznámky k práci.

Základem pro sepsání teoretické části práce byly přednášky a ručně psané poznámky školitele, dostupné v [9]. Součástí práce jsou přiložené kódy, které jsou implementovány v Matlabu<sup>1</sup> a které se vztahují k 8. kapitole. Některé funkce byly převzaty a mírně upraveny z veřejně dostupných kódů [4], které byly vytvořeny pro řešení jiných modelových úloh a jsou detailně popsány v [3]. Ilustrační obrázky byly vytvořeny v programu IPE.

<sup>1</sup>Matlab® je registrovaná známka společnosti The MathWorks, Inc.

## 2. POMOCNÝ APARÁT

V této kapitole shrneme pomocný aparát k tenzorům, variačnímu počtu a Sobolevovým prostorům funkcí. Na tento aparát se budeme v dalších kapitolách odvolávat.

**2.1. Tenzory 2. řádu a 4. řádu.** V práci budeme často používat tenzory druhého a čtvrtého řádu. Proto shrneme základní tenzorové operace, příslušné vlastnosti a uvedeme příklady tenzorů, které budeme v pozdějších fázích práce využívat. Omezíme se pouze na tenzory pro 3D prostory. Při zpracování této kapitoly byly využity zdroje [2, 5, 7, 9].

Tenzory 2. řádu budeme reprezentovat maticemi z prostoru  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Mezi základní operace s maticemi patří biskalární součin, který je definován jako  $\tau : \varepsilon = \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} \varepsilon_{ij}$  a také příslušná Frobeniova norma  $|\tau| = \sqrt{\tau : \tau}$ . Jednou z nejvíce používaných matic bude jednotková matice, což je matice ve tvaru:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{nebo-li} \quad I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Dále budeme definovat symetrickou část matice  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , kterou zapíšeme ve tvaru:  $J_s = \frac{1}{2}(J + J^T)$ . Pro každé matice  $\tau, \varepsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  a jejich symetrické části  $\tau_s$  a  $\varepsilon_s$  platí:

$$(2.1) \quad \tau : \varepsilon_s = \tau_s : \varepsilon_s = \tau_s : \varepsilon.$$

Prostor všech symetrických matic budeme značit  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ . Stopu matice  $\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  definujeme jako  $\text{tr } \tau = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau : I$ . Dále zavedeme rozklad matice  $\tau$  na její volumetrickou část a deviatorickou část:

$$(2.2) \quad \tau = \tau^V + \tau^D, \quad \tau^V = \frac{1}{3}(\text{tr } \tau)I, \quad \tau^D = \tau - \tau^V.$$

Pro každé  $\tau, \varepsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  platí

$$(2.3) \quad \tau^D : \varepsilon^V = 0.$$

Skutečně:

$$\begin{aligned} \tau^D : \varepsilon^V &= (\tau - \tau^V) : \varepsilon^V = \left(\tau - \frac{1}{3}(\text{tr } \tau)I\right) : \frac{1}{3}(\text{tr } \varepsilon)I = \frac{1}{3}(\text{tr } \varepsilon)I : \tau - \frac{1}{9}(\text{tr } \tau)(\text{tr } \varepsilon)I : I = \\ &= \frac{1}{3}(\text{tr } \varepsilon)(\text{tr } \tau) - \frac{1}{9}(\text{tr } \tau)(\text{tr } \varepsilon) \cdot 3 = \frac{1}{3}(\text{tr } \varepsilon)(\text{tr } \tau) - \frac{1}{3}(\text{tr } \varepsilon)(\text{tr } \tau) = 0. \end{aligned}$$

Z rovnosti (2.3) dostáváme další užitečné vztahy:

$$(2.4) \quad |\varepsilon|^2 = |\varepsilon^D|^2 + |\varepsilon^V|^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

$$(2.5) \quad |\varepsilon^D| \leq |\varepsilon|, \quad |\varepsilon^V| \leq |\varepsilon| \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

$$(2.6) \quad \tau : \varepsilon^D = \tau^D : \varepsilon^D = \tau^D : \varepsilon \quad \forall \tau, \varepsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

V práci budou tenzory 2. řádu kromě jednotkové matice nejčastěji zastoupeny maticí  $\sigma$ , která bude představovat Cauchyův tenzor napětí a maticí  $\varepsilon$ , která značí tenzor malých deformací.

Tenzory 4. řádu budeme používat pro reprezentování lineárních zobrazení z  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  do  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  a prostor těchto zobrazení budeme označovat jako  $Lin3$ . Pro komponenty tenzoru  $\mathbb{D} \in Lin3$

platí  $\mathbb{D}_{ijkl} = \mathbb{D}_{jikl} = \mathbb{D}_{ijlk}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . Tensorový součin dvou matic  $\tau, \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  značíme  $\tau \otimes \varepsilon \in Lin3$  a definujeme pomocí vztahu  $(\tau \otimes \varepsilon)_{ijkl} = \tau_{ij}\varepsilon_{kl}$  pro každé  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . Platí

$$(2.7) \quad (\tau \otimes \varepsilon)\eta = (\varepsilon : \eta)\tau \quad \forall \tau, \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3},$$

neboť

$$[(\tau \otimes \varepsilon)\eta]_{ij} = \sum_{k,l} (\tau \otimes \varepsilon)_{ijkl} \eta_{kl} = \sum_{k,l} \tau_{ij} \varepsilon_{kl} \eta_{kl} = \tau_{ij} \sum_{k,l} \varepsilon_{kl} \eta_{kl} = \tau_{ij} (\varepsilon : \eta).$$

Říkáme, že tenzor  $\mathbb{D} \in Lin3$  je *symetrický*, pokud  $\mathbb{D}_{ijkl} = \mathbb{D}_{klij}$   $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . Prostor všech symetrických tenzorů budeme značit  $Lin3S$ . Tenzor  $\mathbb{D}$  je *pozitivně definitní*, jestliže

$$\exists q > 0 : \quad \mathbb{D}\eta : \eta \geq q |\eta|^2 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}.$$

Z tenzorů 4. řádu budeme nejčastěji pracovat s identickým tenzorem  $\mathbb{I}$ , pro něhož platí  $\mathbb{I}\eta = \eta$ ,  $\forall \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ , jeho deviatorickou částí  $\mathbb{I}_D$ , splňující  $\mathbb{I}_D\eta = \eta^D$ ,  $\forall \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  a s tenzorem  $\mathbb{C}$ , který bude představovat izotropní elastický tenzor ve tvaru:  $\mathbb{C} = \lambda I \otimes I + 2\mu \mathbb{I}$ , kde  $\lambda, \mu > 0$ . Tento tenzor blíže prozkoumáme v sekci 3.2.

**2.2. Vybrané výsledky z variačního počtu.** V této podkapitole uvedeme několik základních tvrzení, které lze najít v [2, 5]. V celé podkapitole bude  $V$  značit abstraktní Hilbertův prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$  a indukovanou normou  $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ .

**Věta 2.1.** (*Lax-Milgramovo lemma.*) *Nechť  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  je bilineární forma, která je*

- *spojitá, tj. existuje  $k > 0$  takové, že*

$$\forall u, v \in V : \quad |a(u, v)| \leq k \|u\| \|v\|,$$

- *$V$ -eliptická, tj. existuje  $c > 0$  takové, že*

$$\forall u \in V : \quad a(u, u) \geq c \|u\|^2.$$

*Pak existuje právě jeden prvek  $w \in V$  takový, že*

$$\forall v \in V : \quad L(v) = a(w, v).$$

*Navíc platí*

$$\|w\| \leq \frac{1}{c} \|L\|_{V^*},$$

*kde  $V^*$  je duální prostor k  $V$  a  $\|\cdot\|_{V^*}$  jeho norma.*

Uvažujme následující minimalizační problém

$$(2.8) \quad \min_{u \in V} J(u) \quad \text{?} \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V,$$

kde  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  je konvexní funkcionál, tj.

$$J(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v) \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Nyní shrneme předpoklady na  $J$ , které zaručují existenci a jednoznačnost problému (2.8). Pro více podrobností odkazujeme na knihu [5].

**Definice 2.1.** Řekneme, že funkcionál  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  je:

- *koercivní* na  $V$ , jestliže

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = \infty, \quad v \in V,$$

- *spojitý* na  $V$ , jestliže  $\forall v \in V$  a  $\forall \{v_n\} : v_n \rightarrow v$  ve  $V$  platí

$$J(v_n) \rightarrow J(v) \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

- *slabě polospojité* zdola ve  $V$ , jestliže  $\forall v \in V$  a  $\forall \{v_n\} \subset V : v_n \rightarrow v$  ve  $V$  platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) \geq J(v).$$

**Věta 2.2.** *Nechť je  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  spojitý, konvexní a koercivní funkcionál ve  $V$ . Potom existuje alespoň jedno řešení úlohy (2.8). Pokud je navíc funkcionál  $J$  ryze konvexní, existuje takové řešení právě jedno.*

Důkaz věty 2.2 je kromě definice 2.1 založen na následujících dvou tvrzeních, viz [5]:

**Lemma 2.1.** *Z každé omezené posloupnosti ve  $V$  lze vybrat slabě konvergentní posloupnost, tj.*

$$\|v_n\| < c \implies \exists v \in V \quad \exists \{v_{n_k}\} \subset \{v_n\} : v_{n_k} \rightharpoonup v \text{ ve } V.$$

**Lemma 2.2.** *Nechť  $J$  je konvexní a spojitá ve  $V$ . Potom je také slabě zdola polospojité ve  $V$ .*

Nyní uvedeme podmínky optimality 1. řádu. K tomu je zapotřebí uvést vhodnou definici derivace funkcionálu  $J$ .

**Definice 2.2.** *Gateauxův diferenciál funkcionálu  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  v bodě  $u$  a ve směru  $v$  je definován tímto předpisem:*

$$J'(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t}.$$

Říkáme, že  $J$  je *G-diferencovatelný* ve  $V$ , jestliže pro každé  $u \in V$  je zobrazení  $H : v \rightarrow J'(u, v)$  spojitý lineární funkcionál ve  $V$ .

**Věta 2.3.** *(Nutné a postačující podmínky optimality 1. řádu.) Nechť  $J$  je konvexní a G-diferencovatelný ve  $V$ . Potom následující 2 tvrzení jsou ekvivalentní*

- $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V,$
- $J'(u, v) = 0 \quad \forall v \in V.$

Diferencovatelnost funkcionálu  $J$  nám také umožní snáze vyšetřit, zda-li je  $J$  konvexní. Pro vyšetření konvexity funkcionálu  $J$  můžeme použít následující kritéria.

Kritérium 1: viz [5]

$$(2.9) \quad J \text{ je konvexní} \iff J(v) \leq J(u) + J'(u, v - u) \quad \forall u, v \in V$$

$$(2.10) \quad J \text{ je ryze konvexní} \iff J(v) < J(u) + J'(u, v - u) \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v,$$

Kritérium 2: viz [7]

$$(2.11) \quad J \text{ je konvexní} \iff J'(v, v - u) - J'(u, v - u) \geq 0 \quad \forall u, v \in V$$

$$(2.12) \quad J \text{ je ryze konvexní} \iff J'(v, v - u) - J'(u, v - u) > 0 \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v$$

Poznamenejme také, že existují také podmínky optimality druhého řádu, viz [5, 7]. Ty ale nejdou aplikovat na elasto-plastické problémy, proto je pro stručnost nebudeme uvádět.

**2.3. Sobolevovy prostory funkcí.** V této podkapitole připomeneme vybraná tvrzení o Sobolevových prostorech funkcí typu  $W^{1,2}$ , viz [2, 5, 7]. Nechť v následujícím textu je  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ohraničená oblast s lipschitzovskou hranicí  $\partial\Omega$ .

**Definice 2.3.** Symbolem  $C(\Omega)$  budeme označovat množinu takových funkcí, které jsou spojité v každém bodě  $\Omega$ . Symbolem  $C(\bar{\Omega})$ , pak budeme označovat množinu všech funkcí z  $C(\Omega)$ , které jsou navíc stejnoměrně spojité a omezené v  $\Omega$ . Podobně definujeme prostory spojitě diferencovatelných funkcí  $C^1(\Omega)$  a  $C^1(\bar{\Omega})$ .

Na prostoru  $C^1(\bar{\Omega})$  budeme uvažovat normu

$$\|u\|_{1,2} := \sqrt{\int_{\Omega} |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx}$$

a skalární součin

$$(u, v)_{1,2} := \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) + \nabla u(x) : \nabla v(x) \, dx,$$

kde  $\nabla$  značí gradient  $v$ , tj.  $(\nabla v)_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Definice 2.4.** Buď  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  lebagueovsly měřitelná funkce. Potom prostor  $L^2(\Omega)$  je definován následovně:

$$L^2(\Omega) := \{f : \int_{\Omega} |f|^2 \, dx < +\infty\}.$$

Příslušná norma a skalární součin v  $L^2(\Omega)$  prostoru jsou definovány následovně:

$$\|f\|_{0,2} = \sqrt{\int_{\Omega} f^2(x) \, dx},$$

$$(f, g)_{0,2} = \int_{\Omega} f(x)g(x) \, dx.$$

**Věta 2.4.** (Hölderova nerovnost) Nechť  $f, g \in L^2(\Omega)$ . Pak

$$\left| \int_{\Omega} fg \, dx \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} f^2 \, dx} \sqrt{\int_{\Omega} g^2 \, dx} = \|f\|_{0,2} \|g\|_{0,2}.$$

**Definice 2.5.** Sobolevův prostor  $W^{1,2}(\Omega)$  definujeme jako zúplnění prostoru

$$\left( C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{1,2} \right).$$

Je známo, že  $W^{1,2}(\Omega)$  je separabilní Hilbertův prostor. Protože  $\Omega$  je oblast s lipschitzovskou hranicí, platí

$$W^{1,2}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2, 3\},$$

kde derivace  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  je uvažována ve smyslu distribucí.

**Věta 2.5.** (O stopách.) Existuje právě jedno spojité a lineární zobrazení

$$T : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

takové, že pro každé  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  je

$$Tu = u|_{\partial\Omega}.$$

Prvek  $Tu \in L^2(\partial\Omega)$  nazýváme stopou funkce  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ . Navíc

$$\int_{\partial\Omega} |v|^2 \, dS \leq c_1 \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3.$$

*Poznámka 2.1.* V integrálu přes část nebo celou hranici  $\partial\Omega$  píšeme pro stručnost  $v$  místo  $Tv$ .

**Věta 2.6.** (Greenova věta) Necht  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$  je oblast s lipschitzovskou hranicí. Pak pro každé  $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$  a  $i \in \{1, 2, 3\}$  platí

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \nu_i \, ds,$$

kde  $\nu_i = \nu_i(x)$  je  $i$ -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k  $\partial\Omega$  v  $x$ .

Dále budeme uvažovat Sobolevův prostor

$$[W^{1,2}(\Omega)]^3 = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \mid v_i \in W^{1,2}(\Omega), i = 1, 2, 3 \right\},$$

který je opět separabilním Hilbertovým prostorem. Ponecháme stejné značení pro skalární součin a normu jako v případě  $W^{1,2}(\Omega)$  prostoru, tj.

$$(u, v)_{1,2} := \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) + \nabla u(x) : \nabla v(x) \, dx \quad \forall u, v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3,$$

$$\|v\|_{1,2} := \sqrt{\int_{\Omega} |u(x)|^2 + |\nabla u|^2 \, dx} \quad \forall u, v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3.$$

Na prostoru  $[W^{1,2}(\Omega)]^3$  budeme definovat tenzorové pole  $\varepsilon(u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  takové, že  $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$ , nebo-li  $[\varepsilon(u)]_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ . Máme následující výsledek.

**Věta 2.7.** (Kornova nerovnost.) Necht  $\Gamma_0$  je část hranice  $\partial\Omega$  s kladnou mírou. Potom

$$\exists c_2 > 0 : \quad \int_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 \, dx \geq c_2 \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in V,$$

kde  $V = \left\{ v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3 \mid v = 0 \text{ skoro všude na } \Gamma_0 \right\}$ .

Poznamenejme, že  $V$  je uzavřeným podprostorem  $[W^{1,2}(\Omega)]^3$ .

### 3. KLASICKÁ FORMULACE ÚLOH LINEÁRNÍ PRUŽNOSTI A PERFEKTNÍ PLASTICITY

V této kapitole přistoupíme ke klasické formulaci úloh lineární pružnosti a plasticity. Odvození této formulace je uvedeno v knize [7]. Dále se budeme věnovat analýze příslušných konstitutivních operátorů pro vybrané modely.

**3.1. Obecné schéma problému.** Nejprve zavedeme klasickou formulaci pro abstraktní model zahrnující jak lineární pružnost tak Henckyho plasticitu. Připomeňme, že  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  značí omezenou oblast s Lipschitzovskou hranicí. Hranice  $\partial\Omega$  bude rozdělena na dvě části  $\Gamma_0$  a  $\Gamma_1$ , které budou disjunktní, tedy  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  a  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . Na hranici  $\Gamma_0$  s kladnou mírou bude těleso upevněno, tj. bude předepsána homogenní Dirichletova okrajová podmínka. Na části hranice  $\Gamma_1$  bude zadána Neumannova okrajová podmínka, zastoupena povrchovými silami  $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ , kde  $f : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Objemové síly pak budeme reprezentovat pomocí vektoru  $F = (F_1, F_2, F_3)^T$ , kde  $F_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Jednotkový vektor vnější normály budeme klasicky značit jako  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ . Dále nechť  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  značí tenzorové pole reprezentující Cauchyův tenzor napětí, a  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , je pole posunutí. Potom můžeme psát klasickou formulaci abstraktní úlohy následovně. *Hledáme pole posunů  $u$ , pro které platí*

$$(3.1) \quad \operatorname{div}(\sigma) + F = 0 \quad \text{v } \Omega,$$

$$(3.2) \quad u = 0 \quad \text{na } \Gamma_0,$$

$$(3.3) \quad \sigma \nu = f \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$(3.4) \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad \text{v } \Omega,$$

$$(3.5) \quad \sigma = T_B(\varepsilon(u)) \quad \text{v } \Omega,$$

kde  $(\operatorname{div}(\sigma))_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$  značí divergenci a  $T_B : \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  je abstraktní konstitutivní operátor, který bude studovaný v sekcích 3.2-3.5.

Požadavky na klasické řešení budeme klást následující:  $f_i \in C(\bar{\Gamma}_1)$ ,  $F_i \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} \in C_1(\bar{\Omega})$  a  $u_i \in C_2(\bar{\Omega})$ , kde  $i, j = 1, 2, 3$ . Pro jednoduchost budeme předpokládat homogenní materiál, tj. operátory  $\mathbb{C}$  a  $T_B$  budou nezávislé na prostorové proměnné  $x \in \Omega$ .

**3.2. Operátor  $T_B$  pro úlohu lineární pružnosti.** Pro model lineární pružnosti s izotropním materiálem můžeme konstitutivní vztah mezi napětím a deformacemi (3.5) popsat pomocí zobecněného Hookova zákona:

$$(3.6) \quad \sigma = \mathbb{C}\varepsilon(u), \quad \text{tedy} \quad T_B(\varepsilon) = \mathbb{C}\varepsilon, \quad \mathbb{C}\varepsilon = \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon, \quad \lambda, \mu > 0.$$

Tenzor  $\mathbb{C} \in \operatorname{Lin}3S$  již byl zmíněn v kapitole 2.1. Nyní odvodíme jeho vlastnosti. Předně Laméovy koeficienty  $\lambda, \mu$  jsou daná kladná čísla, která se v praxi odvozují z Poissonova čísla  $\nu$  a Youngova modulu pružnosti  $E$ , protože tyto parametry se dají snadněji získat experimentálním měřením. Platí:

$$(3.7) \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad E > 0, \quad \nu \in (0, \frac{1}{2}).$$

**Lemma 3.1.** (*Vlastnosti tenzoru  $\mathbb{C}$* )

$$(3.8) \quad \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon \geq 2\mu |\varepsilon|^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3},$$



$$(3.9) \quad |\mathbb{C}\varepsilon : \eta| \leq (3\lambda + 2\mu) |\varepsilon| |\eta| \quad \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3},$$

$$(3.10) \quad \mathbb{C}I = (3\lambda + 2\mu)I,$$

$$(3.11) \quad \mathbb{C}\varepsilon^D = (\mathbb{C}\varepsilon)^D = 2\mu\varepsilon^D,$$

$$(3.12) \quad \mathbb{C}^{-1}\sigma = \left( \frac{1}{2\mu} \mathbb{I} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} I \otimes I \right) \sigma.$$

*Důkaz.* (3.8) a (3.9) dokážeme následovně:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon &= (\lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon) : \varepsilon = \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)(\operatorname{tr} \varepsilon) + 2\mu\varepsilon : \varepsilon = \\ &= \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)^2 + 2\mu\varepsilon : \varepsilon \geq 2\mu\varepsilon : \varepsilon = 2\mu|\varepsilon|^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbb{C}\varepsilon : \eta| &= |(\lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon) : \eta| = |(\lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)(\operatorname{tr} \eta) + 2\mu\varepsilon : \eta)| = \\ &= |3\lambda\varepsilon^V : \eta^V + 2\mu\varepsilon : \eta| \leq 3\lambda|\varepsilon^V : \eta^V| + 2\mu|\varepsilon : \eta| \leq \\ &\leq 3\lambda|\varepsilon^V| |\eta^V| + 2\mu|\varepsilon| |\eta| \stackrel{(2.5)}{\leq} (3\lambda + 2\mu) |\varepsilon| |\eta| \quad \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

Protože  $\operatorname{tr} I = 3$ , dostáváme

$$\mathbb{C}I = \lambda(\operatorname{tr} I)I + 2\mu I = \lambda 3I + 2\mu I = (3\lambda + 2\mu)I.$$

Pomocí (2.2) a (2.3) odvodíme  $I^D = 0$  a  $\operatorname{tr}(\varepsilon^D) = 0$ . Odtud plyne

$$(\mathbb{C}\varepsilon)^D = \mathbb{C}\varepsilon^D = 2\mu\varepsilon^D.$$

Existence  $\mathbb{C}^{-1}$  znamená, že  $\varepsilon = \mathbb{C}^{-1}\sigma$ . Nejprve potřebujeme zjistit, jak vypadá stopa matice  $\varepsilon$ :

$$\operatorname{tr} \sigma = \sigma : I \stackrel{(3.6)}{=} 3\lambda(\operatorname{tr} \varepsilon) + 2\mu(\operatorname{tr} \varepsilon) = (3\lambda + 2\mu)(\operatorname{tr} \varepsilon),$$

tedy

$$\operatorname{tr} \varepsilon = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \operatorname{tr} \sigma.$$

Pomocí (2.2) dostáváme:

$$\varepsilon^V = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma^V.$$

Dále z (3.6) a (3.11) vyplývá

$$\sigma^D = (\mathbb{C}\varepsilon)^D = 2\mu\varepsilon^D.$$

Z čehož dostáváme

$$\varepsilon^D = \frac{1}{2\mu} \sigma^D.$$

Pokud nyní sečteme  $\varepsilon^D$  a  $\varepsilon^V$ , dostáváme celkový výraz pro  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^V + \varepsilon^D = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma^V + \frac{1}{2\mu} \sigma^D = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma^V + \frac{1}{2\mu} (\sigma - \sigma^V) \\ &= -\frac{1}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma^V + \frac{1}{2\mu} \sigma = -\frac{1}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\operatorname{tr} \sigma) I + \frac{1}{2\mu} \sigma. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že  $\mathbb{C}^{-1}\sigma = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{1}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\operatorname{tr} \sigma) I$ , nebo-li  $\mathbb{C}^{-1}\sigma = \left( \frac{1}{2\mu} \mathbb{I} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} I \otimes I \right) \sigma$ .  $\square$

**3.3. Operátor  $T_B$  pro abstraktní pružně-perfektně plastický model.** U modelu perfektní plasticity nebude určení operátoru  $T_B$  tak přímočaré jako v případě úlohy lineární pružnosti. Nejprve zavedeme množinu plasticky přípustných napětí  $B$  pro vyhodnocování napětového pole. Tato množina bude mít tvar

$$(3.13) \quad B = \{\tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \mid \varphi(\tau) \leq 0\},$$

kde  $\varphi : \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  je konvexní a spojitá funkce reprezentující plastické kritérium. Dále předpokládáme  $\varphi(0) < 0$ , díky čemuž jsou dostatečně malá napětí plasticky přípustná. Z vlastností  $\varphi$  dostáváme, že  $B$  je konvexní, uzavřená a neprázdná množina. Konstitutivní vztah  $T_B : \varepsilon \mapsto \sigma$  mezi tenzorem napětí  $\sigma$  a tenzorem malých deformací  $\varepsilon$  je definován následujícím implicitním předpisem:

$$(3.14) \quad (\varepsilon - \mathbb{C}^{-1}\sigma) : (\tau - \sigma) \leq 0 \quad \forall \tau \in B.$$

Ze vztahu (3.14) je vidět, že  $\sigma$  je projekcí tenzoru  $\mathbb{C}\varepsilon$  na množinu  $B$  vůči skalárnímu součinu  $(\tau, \sigma)_{\mathbb{C}^{-1}} = \mathbb{C}^{-1}\tau : \sigma$  v  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ . Nyní shrneme základní vlastnosti operátoru  $T_B$  definovaného pomocí (3.14), viz [8].

**Lemma 3.2.** (*Vlastnosti operátoru  $T_B$ .*)

- (1)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \quad \exists! \sigma \in B : \sigma = T_B(\varepsilon).$
- (2)  $\mathbb{C}\varepsilon \in B \implies \sigma = T_B(\varepsilon) = \mathbb{C}\varepsilon.$
- (3)  $\mathbb{C}\varepsilon \notin B \implies \sigma \in \partial B$  nebo-li  $\varphi(\sigma) = 0.$
- (4)  $T_B(\varepsilon)$  je monotónní a lipschitzovsky spojitá funkce v  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ , tj.

$$(3.15) \quad (T_B\varepsilon - T_B\eta) : (\varepsilon - \eta) \geq 0 \quad \forall \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3},$$

$$(3.16) \quad \exists \ell > 0 : |T_B\varepsilon - T_B\eta| \leq \ell |\varepsilon - \eta| \quad \forall \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$$

- (5) Zobrazení  $T_B$  má potenciál, tj. existuje funkce  $\Psi_B : \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $D\Psi_B(\eta) = T_B(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ , kde  $D\Psi_B : \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  je derivací zobrazení  $\Psi_B$ . Navíc platí, že

$$(3.17) \quad \Psi_B(\varepsilon) = \varepsilon : T_B(\varepsilon) - \frac{1}{2} \mathbb{C}^{-1} T_B(\varepsilon) : T_B(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}.$$

- (6) Potenciál  $\Psi_B$  je konvexní a spojitě diferencovatelný v  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ .

Poznamenejme, že konvexita  $\Psi_B$  je důsledkem kritéria konvexity č.2 ze sekce 2.2 a monotonicity operátoru  $T_B$ . Spojitá diferencovatelnost  $\Psi_B$  pak vyplývá z faktu, že  $T_B$  je lipschitzovsky spojitá funkce.

Dále také budeme potřebovat i speciální tvar Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek optimality pro problém (3.14).

**Lemma 3.3.** (*KKT podmínky [8].*) *Nechť  $\varphi$  je diferencovatelná v  $\sigma \in B$ , kde  $\sigma$  řeší (3.14), a nechť  $D\varphi(\sigma) \neq 0$ .*

*Potom*

$$(3.18) \quad \exists! \gamma \geq 0 : \quad \varepsilon - \mathbb{C}^{-1}\sigma = \gamma D\varphi(\sigma), \quad \gamma \varphi(\sigma) = 0, \quad \varphi(\sigma) \leq 0.$$

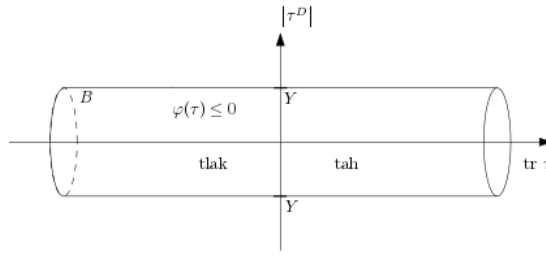
*Pokud navíc:*

- (1)  $\mathbb{C}\varepsilon \in B$  (tj.  $\varphi(\mathbb{C}\varepsilon) \leq 0$ ), potom  $\gamma = 0$  a  $\sigma = \mathbb{C}\varepsilon$ .
- (2)  $\mathbb{C}\varepsilon \notin B$  (tj.  $\varphi(\mathbb{C}\varepsilon) > 0$ ), potom  $\gamma > 0$  a  $\varphi(\sigma) = 0$ .

**3.4. Operátor  $T_B$  pro model s von Misesovým kritériem.** Toto kritérium se využívá častěji u kovových materiálů, které mají podobné chování v tlaku i tahu. Funkce  $\varphi$  pro von Misesovo kritérium je ve tvaru

$$(3.19) \quad \varphi(\tau) = |\tau^D| - Y \quad Y > 0,$$

kde  $Y > 0$  je materiálový parametr reprezentující jednoosou pevnost v tlaku nebo tahu. Von Misesovo kritérium je znázorněné na Obrázku 3.1. Vidíme, že množina plasticky přípustných napětí definuje neomezený válec zarovnaný vůči hydrostatické ose "tr  $\tau$ " a kolmý na deviatorickou rovinu " $\tau^D$ ". Pro jednoduchost znázorňujeme deviatorickou rovinu pouze pomocí jedné osy " $\tau^D$ ". Ve skutečnosti tenzor  $\tau^D$  je určen 5 nezávislými parametry.



OBRÁZEK 3.1. Znázornění Von Misesova kritéria

**3.4.1. Určení  $T_B(\varepsilon)$  pro von Misesovo kritérium.** Nyní odvodíme explicitní tvar operátoru  $T_B$  pro von Misesovo kritérium užitím lemma 3.3. Samotné určení  $T_B$  rozdělíme do dvou větví, a to do větve elastické a větve plastické. Pro elastickou větev bude podle lemma 3.3(1) platit, že  $\mathbb{C}\varepsilon \in B$ ,  $\gamma = 0$  a  $\sigma = T_B\varepsilon = \mathbb{C}\varepsilon$ . Podmínku  $\mathbb{C}\varepsilon \in B$  lze užitím (3.19) přepsat následovně:

$$(3.20) \quad \varphi(\mathbb{C}\varepsilon) = |(\mathbb{C}\varepsilon)^D| - Y \stackrel{(3.11)}{=} 2\mu |\varepsilon^D| - Y \leq 0.$$

Pro plastickou větev pak bude podle lemma 3.3(2) platit, že  $\mathbb{C}\varepsilon \notin B$ , tj.  $2\mu |\varepsilon^D| - Y > 0$ , a navíc  $\varphi(\sigma) = 0$  a  $\lambda > 0$ .

Nejdříve odvodíme tvar  $D\varphi(\tau)$ . Funkce  $\varphi$  je diferencovatelná v každém bodě  $\tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ , pro který platí  $\tau^D \neq 0$ . Derivaci  $D\varphi(\tau)$  najdeme užitím diferenciálu Gateaux, a to tak, aby platilo

$$D\varphi(\tau) : \eta = \varphi'(\tau, \eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3},$$

kde  $\varphi'(\tau, \eta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(\tau + t\eta) - \varphi(\tau)] = f'(0)$ ,  $f(t) := \varphi(\tau + t\eta)$ . Postupně odvodíme:

$$\begin{aligned} f(t) &= |\tau^D + t\eta^D| - Y = [(\tau^D + t\eta^D) : (\tau^D + t\eta^D)]^{\frac{1}{2}} - Y = \\ &= \left[ |\tau^D|^2 + 2t\tau^D : \eta^D + t^2 |\eta^D|^2 \right]^{\frac{1}{2}} - Y, \end{aligned}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} \left( |\tau^D|^2 + 2t\tau^D : \eta^D + t^2 |\eta^D|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 2\tau^D : \eta^D + 2t |\eta^D|^2 \right) = \frac{\tau^D : \eta^D + t |\eta^D|^2}{|\tau^D + t \cdot \eta^D|},$$

$$\varphi'(\tau, \eta) = f'(0) = \frac{\tau^D : \eta^D}{|\tau^D|} = \frac{\tau^D}{|\tau^D|} : \eta^D \stackrel{(2.6)}{=} \frac{\tau^D}{|\tau^D|} : \eta \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}, \tau^D \neq 0, \forall \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}.$$

Odtud dostáváme

$$(3.21) \quad D\varphi(\tau) = \frac{\tau^D}{|\tau^D|} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}, \quad \tau^D \neq 0.$$

Užitím lemma 3.3(2) dostáváme, následující systém rovnic:

$$(3.22) \quad \varepsilon - \mathbb{C}^{-1}\sigma = \gamma D\varphi(\sigma) = \gamma \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|},$$

$$(3.23) \quad \varphi(\sigma) = |\sigma^D| - Y = 0.$$

Když rovnici (3.22) vynásobíme  $\mathbb{C}$ , dostáváme

$$\mathbb{C}\varepsilon - \sigma = \gamma \mathbb{C} \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|} \stackrel{(3.11)}{=} 2\mu\gamma \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|},$$

nebo-li

$$(3.24) \quad \sigma = \mathbb{C}\varepsilon - 2\mu\gamma \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|}.$$

Po vynásobení rovnice (3.24) tenzorem  $\mathbb{I}_D$  postupně odvodíme:

$$(\mathbb{C}\varepsilon)^D - \sigma^D = 2\mu\gamma \left( \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|} \right)^D = 2\mu\gamma \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|},$$

$$2\mu\varepsilon^D - \sigma^D = 2\mu\gamma \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|},$$

$$(3.25) \quad 2\mu\varepsilon^D = \left( 2\mu\gamma \frac{1}{|\sigma^D|} + 1 \right) \sigma^D,$$

$$(3.26) \quad 2\mu |\varepsilon^D| = \left( 2\mu\gamma \frac{1}{|\sigma^D|} + 1 \right) |\sigma^D| = 2\mu\gamma + |\sigma^D|.$$

Užitím (3.25) a (3.26) dostáváme

$$(3.27) \quad \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} = \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|}$$

a

$$(3.28) \quad |\sigma^D| = 2\mu |\varepsilon^D| - 2\mu\gamma.$$

Pokud dosadíme (3.28) do (3.23), získáme

$$(3.29) \quad \gamma = \frac{2\mu |\varepsilon^D| - Y}{2\mu}.$$

Dosadíme-li nyní do (3.24) rovnosti (3.27) a (3.29) zjistíme, že  $\sigma$  bude mít pro plastickou větev tvar

$$\sigma = T_B(\varepsilon) = \mathbb{C}\varepsilon - 2\mu \frac{2\mu |\varepsilon^D| - Y}{2\mu} \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} = \mathbb{C}\varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}.$$

Explicitní tvar operátoru  $T_B(\varepsilon)$  pro von Misesovo kritérium je tedy ve tvaru

$$(3.30) \quad T_B(\varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{C}\varepsilon, & \text{pro } 2\mu |\varepsilon^D| \leq Y, \\ \mathbb{C}\varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}, & \text{pro } 2\mu |\varepsilon^D| > Y. \end{cases}$$

Poznamenejme, že funkce  $T_B$  je spojitá i pro  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ , které leží na elasto-plastickém rozhraní, kde  $2\mu |\varepsilon^D| = Y$ . Nedochází tedy k rozporu s lemmatem 3.2 (4).

3.4.2. *Určení potenciálu  $\Psi_B(\varepsilon)$  pro Von Misesovo kritérium.* Dosazením (3.30) do (3.17) odvodíme explicitní tvar  $\Psi_B$ :

(1) Nechť  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ ,  $2\mu |\varepsilon^D| \leq Y$  (elastická větev):

$$\begin{aligned}\Psi_B(\varepsilon) &= \varepsilon : \mathbb{C}\varepsilon - \frac{1}{2}\mathbb{C}^{-1}(\mathbb{C}\varepsilon) : (\mathbb{C}\varepsilon) = \\ &= \varepsilon : \mathbb{C}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon : (\mathbb{C}\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon.\end{aligned}$$

(2) Nechť  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ ,  $2\mu |\varepsilon^D| \geq Y$  (plastická větev):

$$\begin{aligned}\Psi_B(\varepsilon) &= \varepsilon : \left[ \mathbb{C}\varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathbb{C}^{-1} \left[ \mathbb{C}\varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right] : \left[ \mathbb{C}\varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right] = \\ &= \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \frac{\varepsilon : \varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \varepsilon - \frac{(2\mu |\varepsilon^D| - Y)}{2\mu} \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right] : \left[ \mathbb{C}\varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right] = \\ &= \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) |\varepsilon^D| - \frac{1}{2}\mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon + (2\mu |\varepsilon^D| - Y) |\varepsilon^D| - \\ &\quad - \frac{1}{4\mu} (2\mu |\varepsilon^D| - Y)^2 \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} : \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - \frac{1}{4\mu} (2\mu |\varepsilon^D| - Y)^2.\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme

$$\Psi_B(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon, & \text{pro } 2\mu |\varepsilon^D| \leq Y, \\ \frac{1}{2}\mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - \frac{1}{4\mu} (2\mu |\varepsilon^D| - Y)^2, & \text{pro } 2\mu |\varepsilon^D| > Y. \end{cases}$$

3.4.3. *Určení  $DT_B(\varepsilon)$  pro von Misesovo kritérium.* Při numerickém řešení pružně-plastických problémů pomocí Newtonovy metody je zapotřebí také odvodit derivaci  $DT_B : \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \rightarrow Lin3S$ . Poznamenejme, že derivace  $T_B(\varepsilon)$  neexistuje pro  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  takové, že  $2\mu |\varepsilon^D| = Y$ . Pro taková  $\varepsilon$  obvykle dodefinujeme diferenciální operátor limitním přechodem z elastické oblasti. Jelikož je derivace  $DT_B(\varepsilon)$  zobrazení z  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  do  $Lin3$ , dostáváme  $(DT_B(\varepsilon))\eta = T'_B(\varepsilon, \eta)$ ,  $\forall \eta \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ . Pro elastickou větev bude platit, že

$$DT_B(\varepsilon) = \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \quad 2\mu |\varepsilon^D| < Y.$$

U plastické větve provedeme výpočet v několika krocích. Nejprve musíme vypočítat derivaci funkce  $\frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}$ .

$$D \left( \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right) = D \left( |\varepsilon^D|^{-1} \varepsilon^D \right) = \varepsilon^D \otimes D \left( |\varepsilon^D|^{-1} \right) + |\varepsilon^D|^{-1} D \left( \varepsilon^D \right) =$$

$$= \varepsilon^D \otimes \frac{-\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|^3} + \frac{1}{\varepsilon^D} \mathbb{I}_D = \frac{1}{|\varepsilon^D|} \left( \mathbb{I}_D - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right),$$

kde  $\otimes$  značí tenzorový součin zavedený v kapitole 2.1. Odtud

$$\begin{aligned} DT_B(\varepsilon) &= \mathbb{C} - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right) - (2\mu |\varepsilon^D| - Y) \left( \mathbb{I}_D - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right) \\ &= \mathbb{C} - 2\mu \mathbb{I}_D + \frac{Y}{|\varepsilon^D|} \left( \mathbb{I}_D - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right) \quad \forall 2\mu |\varepsilon^D| > Y. \end{aligned}$$

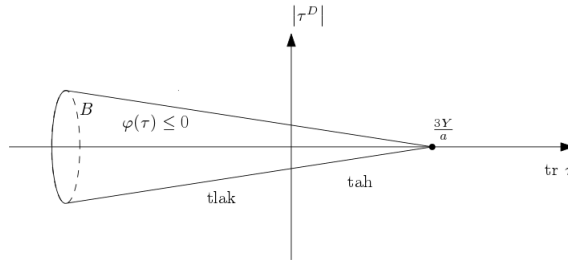
Explicitní tvar  $DT_B(\varepsilon)$  je tedy následující:

$$DT_B(\varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{pro } 2\mu |\varepsilon^D| < Y, \\ \mathbb{C} - 2\mu \mathbb{I}_D + \frac{Y}{|\varepsilon^D|} \left( \mathbb{I}_D - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right), & \text{pro } 2\mu |\varepsilon^D| > Y. \end{cases}$$

**3.5. Operátor  $T_B$  pro model s Drucker-Pragerovým kritériem.** Drucker-Pragerovo kritérium se používá pro materiály s odlišným chováním v tlaku a tahu. Patří mezi ně horniny nebo beton, které mají několikanásobně větší pevnost v tlaku než v tahu. Funkce  $\varphi$  reprezentující Drucker-Pragerovo kritérium je ve tvaru

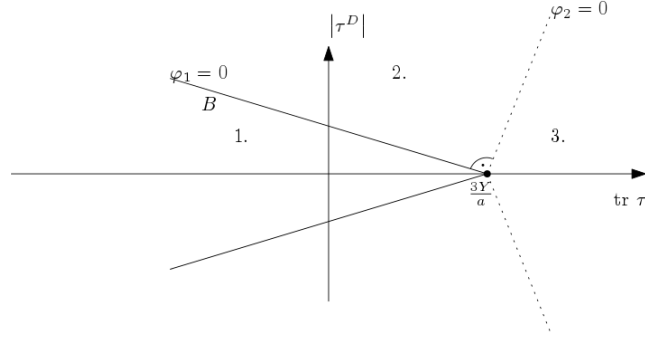
$$(3.31) \quad \varphi(\tau) = |\tau^D| + \frac{a}{3}(\text{tr } \tau) - Y,$$

kde  $a, Y > 0$  jsou materiálové parametry. Na Obrázku 3.2 je znázorněna množina plasticky přípustných napětí pro Drucker-Pragerovo kritérium. Má tvar neomezeného kužele zarovnaného podle hydrostatické osy. Vidíme, že v tahu (tj. pro  $\text{tr } \tau > 0$ ) snáze dojde k překročení Drucker-Pragerova kritéria.



OBRÁZEK 3.2. Znázornění Drucker-Pragerova kritéria

**3.5.1. Odvození  $T_B(\varepsilon)$  pro Drucker-Pragerovo kritérium.** Explicitní tvar operátoru  $T_B : \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  definovaného pomocí (3.14) odvodíme pro Drucker-Pragerovo kritérium opět pomocí lemma 3.2. Tentokrát budeme rozlišovat 3 případy. V prvním případě bude docházet k projekci na sebe (elastická větev), ve druhé větvi dojde k projekci na hladkou plochu kužele a ve třetím případě pak dojde k projekci na vrchol kužele, tj. do bodu  $\tau_A$ , viz Obrázek 3.3.



OBRÁZEK 3.3. Schéma projekce na Drucker-Pragerův kužel za zjednodušujícího předpokladu  $\mathbb{C} = \mathbb{I}$ .

Nejdříve zjistíme, jak bude vypadat  $D\varphi(\tau)$ . Protože  $D(|\tau^D|) \stackrel{(3.21)}{=} \frac{\tau^D}{|\tau^D|}$ ,  $\forall \tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ ,  $\tau^D \neq 0$  a  $D(\text{tr } \tau) = I$ ,  $\forall \tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ , dostáváme

$$(3.32) \quad D\varphi(\tau) = \frac{\tau^D}{|\tau^D|} + \frac{a}{3}I \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}, \tau^D \neq 0.$$

V 1. případě předpokládáme, že  $\varphi_1(\varepsilon) := \varphi(\mathbb{C}\varepsilon) \leq 0$ . Dosazením do (3.31) dostáváme

$$(3.33) \quad \varphi_1(\varepsilon) = 2\mu |\varepsilon^D| + ak(\text{tr } \varepsilon) - Y,$$

kde  $k := \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$ . Podle lemma 3.2 nebo 3.3 bude operátor  $T_B(\varepsilon)$  ve tvaru

$$\sigma = T_B(\varepsilon) = \mathbb{C}\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}, \quad \varphi_1(\varepsilon) \leq 0.$$

V 2. případě předpokládáme, že  $\varphi_1(\varepsilon) > 0$  a současně  $\sigma \neq \tau_A$ . Potom hledaný tenzor  $\sigma = T_B(\varepsilon)$  leží na hladké ploše Drucker-Pragerova kuželu, tj.  $\gamma > 0$ ,  $\varphi(\sigma) = 0$  a  $\sigma^D \neq 0$ . Užití lemma 3.3(2) v tomto případě vede na následující systém rovnic:

$$(3.34) \quad |\sigma^D| + \frac{a}{3}(\text{tr } \sigma) - Y = 0,$$

$$(3.35) \quad \varepsilon - \mathbb{C}^{-1}\sigma = \gamma \left( \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|} + \frac{a}{3}I \right).$$

Pokud nyní vynásobíme rovnici (3.35) tenzorem  $\mathbb{C}$ , dostáváme

$$(3.36) \quad \mathbb{C}\varepsilon - \sigma = 2\mu\gamma \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|} + akI\gamma,$$

nebo-li

$$(3.37) \quad \sigma = \mathbb{C}\varepsilon - \gamma \left( 2\mu \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|} + akI \right).$$

Když rovnici (3.36) vynásobíme tenzorem  $\mathbb{I}_D$ , máme:

$$(\mathbb{C}\varepsilon)^D - \sigma^D = \gamma \left( 2\mu \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|} + akI^D \right) = 2\mu\gamma \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|}.$$

Protože  $(\mathbb{C}\varepsilon)^D = 2\mu\varepsilon^D$  a  $I^D = 0$ , postupně odvodíme:

$$(3.38) \quad 2\mu\varepsilon^D = \left( \frac{2\mu\gamma}{|\sigma^D|} + 1 \right) \sigma^D,$$

$$(3.39) \quad 2\mu |\varepsilon^D| = (2\mu\gamma + |\sigma^D|), \quad |\sigma^D| = 2\mu |\varepsilon^D| - 2\mu,$$

$$(3.40) \quad \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} = \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|}.$$

Aplikujeme-li na rovnici (3.37) operátor stop "tr", tj. násobíme-li (3.37) jednotkovou matici  $I$ , odvodíme

$$(3.41) \quad (\text{tr } \sigma) = \text{tr } (\mathbb{C}\varepsilon) - \gamma \text{tr } \left( 2\mu \frac{\sigma^D}{|\sigma^D|} + akI \right) = 3k(\text{tr } \varepsilon) - 3\gamma ak.$$

Pokud nyní do rovnice (3.34) dosadíme rovnice (3.39) a (3.41), získáváme neznámou  $\gamma$ :

$$(3.42) \quad \begin{aligned} 0 &= |\sigma^D| + \frac{a}{3}(\text{tr } \sigma) - Y \implies 0 = 2\mu |\varepsilon^D| - 2\mu\gamma + \frac{a}{3}(3k(\text{tr } \varepsilon) - 3\gamma ak) - Y \\ &= 2\mu |\varepsilon^D| - 2\mu\gamma + ak(\text{tr } \varepsilon) - \gamma a^2 k - Y \\ \gamma(2\mu + a^2 k) &= 2\mu |\varepsilon^D| + ak(\text{tr } \varepsilon) - Y \\ \gamma &:= \gamma(\varepsilon) = \frac{2\mu |\varepsilon^D| + ak(\text{tr } \varepsilon) - Y}{2\mu + a^2 k}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li (3.40) a (3.42) do rovnice (3.37), dostaneme

$$\sigma = \mathbb{C}\varepsilon - \gamma(\varepsilon) \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + akI \right).$$

Nyní předpoklad  $\sigma^D \neq 0$  (tj.  $|\sigma^D| > 0$ ) nahradíme předpokladem, který závisí pouze na  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} 0 &< |\sigma^D| \stackrel{(3.39)}{=} 2\mu |\varepsilon^D| - 2\mu\gamma = 2\mu(|\varepsilon^D| - \gamma) \stackrel{(3.42)}{=} 2\mu \left( |\varepsilon^D| - \frac{2\mu |\varepsilon^D| + ak(\text{tr } \varepsilon) - Y}{2\mu + a^2 k} \right), \\ 0 &< \frac{(2\mu + a^2 k) |\varepsilon^D| - 2\mu |\varepsilon^D| - ak(\text{tr } \varepsilon) + Y}{2\mu + a^2 k}, \\ 0 &< a^2 k |\varepsilon^D| - ak(\text{tr } \varepsilon) + Y, \\ 0 &< a^2 |\varepsilon^D| - a(\text{tr } \varepsilon) + \frac{Y}{k} := \varphi_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

2. případ tedy nastane, pokud platí  $\varphi_1(\varepsilon) > 0$  a  $\varphi_2(\varepsilon) > 0$ , kde

$$(3.43) \quad \varphi_2(\varepsilon) = a^2 |\varepsilon^D| - a(\text{tr } \varepsilon) + \frac{Y}{k}.$$

Výsledný tvar operátoru  $T_B$  pro 2.případ bude

$$\sigma = T_B(\varepsilon) = \mathbb{C}\varepsilon - \gamma(\varepsilon) \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + akI \right), \quad \text{kde } \gamma(\varepsilon) = \frac{\varphi_1(\varepsilon)}{2\mu + a^2 k}.$$

3. případ nastane, když  $\varphi_1(\varepsilon) > 0$  a  $\varphi_2(\varepsilon) \leq 0$ , což je však ekvivalentní se zápisem  $\varphi_2(\varepsilon) \leq 0$ , neboť  $\varphi_2(\varepsilon) \leq 0$  implikuje  $\varphi_1(\varepsilon) > 0$ , viz Obrázek 3.3. Pro 3. případ dostáváme, že

$$\sigma = T_B(\varepsilon) = \tau_A = \frac{Y}{a} I,$$

tedy, že  $\sigma$  je vrcholem Drucker-Pragerova kuželu.



Explicitní tvar operátoru  $T_B(\varepsilon)$  tedy bude vypadat následovně:

$$(3.44) \quad T_B(\varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{C}\varepsilon & \varphi_1(\varepsilon) \leq 0, \\ \mathbb{C}\varepsilon - \gamma(\varepsilon) \cdot \left(2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + akI\right), & \varphi_1(\varepsilon) > 0 \wedge \varphi_2(\varepsilon) > 0, \\ \frac{\gamma}{a}I & \varphi_2(\varepsilon) \leq 0, \end{cases}$$

kde  $\gamma(\varepsilon)$  je definováno pomocí (3.42). Připomeňme, že  $T_B$  má být lipschitzovsky spojitě pro každé  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ . Ze (3.44) lze skutečně nahlédnout, že spojitost je zachována i pro mezní případy  $\varphi_1(\varepsilon) = 0$  a  $\varphi_2(\varepsilon) = 0$ .

**3.5.2. Odvození potenciálu  $\Psi_B(\varepsilon)$  pro Drucker-Pragerovo kritérium.** Explicitní tvar  $\Psi_B$  získáme dosazením (3.44) do (3.17).

(1) Elastická větev  $\varphi_1(\varepsilon) \leq 0$ . Zde je odvození stejné jako u von Misesova kritéria a platí

$$\Psi_B(\varepsilon) = \frac{1}{2} \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon.$$

(2) Návrat na hladkou plochu kuželu, tj.  $\varphi_1(\varepsilon) > 0$  a  $\varphi_2(\varepsilon) > 0$ :

$$\begin{aligned} \Psi_B(\varepsilon) &= \varepsilon : T_B(\varepsilon) - \frac{1}{2} \mathbb{C}^{-1}(T_B(\varepsilon)) : (T_B(\varepsilon)) = \varepsilon : \left( \mathbb{C}\varepsilon - \gamma(\varepsilon) \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + akI \right) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbb{C}^{-1} \left[ \mathbb{C}\varepsilon - \gamma(\varepsilon) \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + akI \right) \right] : \left[ \mathbb{C}\varepsilon - \gamma(\varepsilon) \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + akI \right) \right] = \\ &= \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - 2\mu\gamma(\varepsilon) \frac{\varepsilon^D : \varepsilon}{|\varepsilon^D|} - ak\gamma(\varepsilon) I : \varepsilon - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \varepsilon - \gamma(\varepsilon) \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} - \gamma(\varepsilon) \frac{ak}{3\lambda + 2\mu} I \right) : \left( \mathbb{C}\varepsilon - \gamma(\varepsilon) 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} - \gamma(\varepsilon) akI \right) = \\ &= \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - 2\mu\gamma(\varepsilon) |\varepsilon^D| - ak\gamma(\varepsilon) (\text{tr } \varepsilon) - \frac{1}{2} \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon + \mu\gamma(\varepsilon) |\varepsilon^D| + \frac{ak\gamma(\varepsilon) (\text{tr } \varepsilon)}{2} + \\ &\quad + \frac{\gamma(\varepsilon) \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon^D}{2 |\varepsilon^D|} - \gamma^2(\varepsilon) \mu - \frac{\gamma^2(\varepsilon) ak \varepsilon^D : I}{2 |\varepsilon^D|} + \frac{\gamma(\varepsilon) \mu ak}{2 (3\lambda + 2\mu)} \mathbb{C}\varepsilon : I - \\ &\quad - \gamma^2(\varepsilon) \frac{\mu ak}{3\lambda + 2\mu} \frac{\varepsilon^D : I}{|\varepsilon^D|} - \frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2} \frac{a^2 k^2}{3\lambda + 2\mu} I : I = \\ &= \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - \frac{1}{2} \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - 2\mu\gamma(\varepsilon) |\varepsilon^D| + \mu\gamma(\varepsilon) |\varepsilon^D| - ak\gamma(\varepsilon) (\text{tr } \varepsilon) + \frac{ak\gamma(\varepsilon) (\text{tr } \varepsilon)}{2} - \\ &\quad - \frac{\gamma^2(\varepsilon) ak \varepsilon^D : I}{2 |\varepsilon^D|} - \gamma^2(\varepsilon) \frac{\mu ak}{3\lambda + 2\mu} \frac{\varepsilon^D : I}{|\varepsilon^D|} - \frac{3\gamma^2(\varepsilon)}{2} \frac{a^2 k^2}{3\lambda + 2\mu} - \gamma^2(\varepsilon) \mu + \\ &\quad + \frac{\gamma(\varepsilon) \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon^D}{2 |\varepsilon^D|} + \frac{\gamma(\varepsilon) \mu ak}{2 (3\lambda + 2\mu)} \mathbb{C}\varepsilon : I = \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - \mu\gamma(\varepsilon) |\varepsilon^D| - \frac{ak\gamma(\varepsilon) (\text{tr } \varepsilon)}{2} - \frac{\gamma^2(\varepsilon) ak \varepsilon^D : I}{2 |\varepsilon^D|} - \gamma^2(\varepsilon) \frac{\mu ak}{3\lambda + 2\mu} \frac{\varepsilon^D : I}{|\varepsilon^D|} - \\ &\quad - \frac{3\gamma^2(\varepsilon)}{2} \frac{a^2 k^2}{3\lambda + 2\mu} - \gamma^2(\varepsilon) \mu + \frac{\gamma(\varepsilon) \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon^D}{2 |\varepsilon^D|} + \frac{\gamma(\varepsilon) \mu ak}{2 (3\lambda + 2\mu)} \mathbb{C}\varepsilon : I = \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{C}\varepsilon : \varepsilon - \mu\gamma(\varepsilon) |\varepsilon^D| - \frac{1}{2} \gamma(\varepsilon) ak (\text{tr } \varepsilon) - \frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2} a^2 k + \mu\gamma(\varepsilon) |\varepsilon^D| + \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma(\varepsilon) ak (\text{tr } \varepsilon) - \gamma^2(\varepsilon) \mu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbb{C} \varepsilon : \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma(\varepsilon) a k (\text{tr } \varepsilon) - \frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2} a^2 k = \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{C} \varepsilon : \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma^2(\varepsilon) (2\mu + a^2 k).
\end{aligned}$$

(3) Návrat do vrcholu kužele, tj.  $\varphi_2(\varepsilon) \leq 0$ :

$$\begin{aligned}
\Psi_B(\varepsilon) &= \varepsilon : T_B(\varepsilon) - \frac{1}{2} \mathbb{C}^{-1}(T_B(\varepsilon)) : (T_B(\varepsilon)) = \\
&= \varepsilon : \left( \frac{Y}{a} I \right) - \frac{1}{2} \mathbb{C}^{-1} \left( \frac{Y}{a} I \right) : \left( \frac{Y}{a} I \right) = \\
&= \frac{Y}{a} \varepsilon : I - \left( \frac{1}{2} \frac{Y}{a} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} I \right) : \left( \frac{Y}{a} I \right) = \\
&= \frac{Y}{a} \text{tr } \varepsilon - \frac{1}{2} \left( \frac{Y}{a} \right)^2 \frac{1}{3\lambda + 2\mu} I : I = \\
&= \frac{Y}{a} \text{tr } \varepsilon - \frac{1}{2} \left( \frac{Y}{a} \right)^2 \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Výsledné  $\Psi_B(\varepsilon)$  tedy bude mít tvar

$$\Psi_B(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbb{C} \varepsilon : \varepsilon, & \varphi_1(\varepsilon) \leq 0, \\ \frac{1}{2} \mathbb{C} \varepsilon : \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma^2(\varepsilon) (2\mu + a^2 k), & \varphi_1(\varepsilon) > 0 \wedge \varphi_2(\varepsilon) > 0, \\ \frac{Y}{a} \text{tr } \varepsilon - \frac{1}{2} \left( \frac{Y}{a} \right)^2 \frac{1}{k}, & \varphi_2(\varepsilon) \leq 0. \end{cases}$$

**3.5.3. Určení  $DT_B(\varepsilon)$  pro Drucker-Pragerovo kritérium.** Podobně jako pro von Misesovo kritérium, odvodíme i zde derivaci funkce  $T_B$ . Derivace nebude existovat, pokud  $\varphi_2(\varepsilon) = 0$  nebo  $\varphi_1(\varepsilon) = 0$ . Zobrazení  $DT_B : \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3} \rightarrow Lin3S$  odvodíme postupně pro všechny tři případy.

(1) Elastická větev, tj.  $\varphi_1(\varepsilon) < 0$ . Potom  $DT_B(\varepsilon) = \mathbb{C}$ .

(2) Návrat na hladkou plochu kuželu, tj.  $\varphi_1(\varepsilon) > 0$  a  $\varphi_2(\varepsilon) > 0$ . Nejdříve uvedeme derivace  $D(\gamma(\varepsilon))$  a  $D\left(\frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}\right)$ :

$$\begin{aligned}
(3.45) \quad D(\gamma(\varepsilon)) &= \frac{1}{2\mu + a^2 k} \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + a k I \right), \\
D\left(\frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}\right) &= \frac{1}{|\varepsilon^D|} \left( \mathbb{I}_D - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right).
\end{aligned}$$

Užitím (3.44) dostáváme

$$\begin{aligned}
DT_B(\varepsilon) &= \mathbb{C} - D(\gamma(\varepsilon)) \otimes \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + a k I \right) - \gamma(\varepsilon) \left( 2\mu D\left(\frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}\right) + a k D(I) \right), \\
DT_B(\varepsilon) &= \mathbb{C} - \frac{1}{2\mu + a^2 k} \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + a k I \right) \otimes \left( 2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + a k I \right) - \gamma(\varepsilon) \frac{2\mu}{|\varepsilon^D|} \left( \mathbb{I}_D - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \right).
\end{aligned}$$

(3) Návrat do vrcholu kužele, tj.  $\varphi_2(\varepsilon) \leq 0$ . Derivace má tvar  $DT_B(\varepsilon) = \mathbb{O}$ , kde  $\mathbb{O}\tau = 0$   $\forall \tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ .

Celkově dostáváme:

$$DT_B(\varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \varphi_1(\varepsilon) < 0, \\ \mathbb{C} - D(\gamma(\varepsilon)) \otimes \left(2\mu \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} + akI\right) - \gamma(\varepsilon) \frac{2\mu}{|\varepsilon^D|} \left(\mathbb{I}_D - \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|} \otimes \frac{\varepsilon^D}{|\varepsilon^D|}\right), & \varphi_1(\varepsilon) > 0 \wedge \varphi_2(\varepsilon) > 0, \\ \mathbb{O}, & \varphi_2(\varepsilon) < 0, \end{cases}$$

kde  $\gamma(\varepsilon)$  a  $D\gamma(\varepsilon)$  jsou definovány pomocí (3.42) a (3.45).

#### 4. SLABÁ (VARIÁČNÍ) FORMULACE ÚLOH V POSUNECH

V této kapitole se budeme věnovat odvození slabé formulace úlohy v posunech a příslušnému minimalizačnímu problému. V závěru kapitoly se také budeme věnovat existenci a jednoznačnosti řešení. Více podrobností lze najít ve [7, 9, 10].

**4.1. Odvození slabé formulace a principu minima potenciální energie.** Nyní přistoupíme k slabé formulaci úlohy (3.1)–(3.5). Využijeme k tomu zejména aparát z 2. kapitoly. Zavedeme nejprve prostor testovacích (přístupných) funkcí  $\hat{V}$  jako

$$(4.1) \quad \hat{V} := \left\{ v \in [C^1(\bar{\Omega})]^3 \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_0 \right\},$$

kde  $\Gamma_0$  je oblast s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Pokud nyní vynásobíme rovnost (3.1) testovací funkcí  $v \in \hat{V}$  a integrujeme-li přes oblast  $\Omega$ , dostáváme

$$(4.2) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \cdot v \, dx + \int_{\Omega} F \cdot v \, dx = 0 \quad \forall v \in \hat{V}.$$

Aplikujeme-li Greenovu větu 2.6 na složky  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i$  definující skalární součin  $\operatorname{div}(\sigma) \cdot v$ , odvodíme

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \cdot v \, dx = \int_{\partial\Omega} (\sigma\nu) \cdot v \, ds - \int_{\Omega} \sigma : \nabla v \, dx \quad \forall v \in \hat{V}.$$

Pomocí okrajových podmínek (3.2) a (3.3) a vztahu (2.1) dostáváme

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \cdot v \, dx = \int_{\Gamma_1} f \cdot v \, ds - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, dx \quad \forall v \in \hat{V}.$$

Po dosazení do (4.2) a užitím konstitutivního vztahu  $\sigma = T_B(\varepsilon(u))$  obdržíme úlohu

$$(4.4) \quad ?u \in \hat{V} : \quad \int_{\Omega} T_B(\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} F \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} f \cdot v \, ds \quad \forall v \in \hat{V}.$$

Prostor  $\hat{V}$  však není vhodný pro řešitelnost úlohy (4.4), protože není úplný vůči normě  $\|\cdot\|_{1,2}$ . Vhodným zúplněním prostoru (4.1) je prostor

$$(4.5) \quad V = \left\{ v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3 \mid v = 0 \text{ skoro všude na } \Gamma_0 \right\},$$

který již byl uvažován v sekci 2.3. Po zúplnění prostoru musíme nyní přistoupit k rozšíření rovnice (4.4) na prostor  $V$ . Abychom mohli tento krok učinit, budeme navíc předpokládat, že  $F \in [L^2(\Omega)]^3$ ,  $f \in [L^2(\Gamma_1)]^3$ .

Slabá formulace úlohy bude vypadat následovně: *Hledáme  $u \in V$ , pro které platí*

$$(4.6) \quad \int_{\Omega} T_B(\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} F \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot v \, ds \quad \forall v \in V.$$

Uvedeme nyní také ještě odpovídající minimalizační problém nebo-li princip minima potenciální energie. Minimalizační problém úlohy (4.6) vypadá následovně. *Hledáme  $u \in V$ , pro které platí*

$$(4.7) \quad J(u) = \min \{ J(v) : v \in V \},$$

kde

$$J(v) := \int_{\Omega} \Psi_B(\varepsilon(v)) \, dx - \int_{\Omega} F \cdot v \, dx - \int_{\partial\Omega} f \cdot v \, ds \quad v \in V.$$

Úlohy (4.6) a (4.7) budeme v následujících sekcích studovat zvlášť pro elastický a plastický případ.

**4.2. Slabá formulace úlohy lineární pružnosti.** Po dosazení (3.6) do (4.6) dostáváme slabou formulaci úlohy lineární pružnosti. *Hledáme  $u \in V$ , pro které platí*

$$(4.8) \quad \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} F \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot v \, ds \quad \forall v \in V.$$

Zavedeme-li pomocné značení

$$(4.9) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx \quad \forall u, v \in V,$$

$$(4.10) \quad L(v) = \int_{\Omega} F \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot v \, ds \quad \forall v \in V,$$

můžeme pak (4.8) zjednodušeně psát následovně: *Hledáme  $u \in V$ , pro které platí*

$$(4.11) \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Odpovídající minimalizační úloha pro model lineární pružnosti pak bude ve tvaru: *Hledáme  $u \in V$ , pro které platí*

$$(4.12) \quad J(u) = \min \{ J(v) : v \in V \},$$

kde  $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad v \in V$ .

Nyní máme definovanou slabou formulaci úlohy lineární pružnosti, ale nevíme, zda-li je dobře definována a zda-li má řešení.

**Lemma 4.1.** *Funkcionál  $L$  definovaný pomocí (4.10) je spojitý a lineární ve  $[W^{1,2}(\Omega)]^3$ .*

*Důkaz.* Nechť  $u, v$  jsou libovolné funkce z  $[W^{1,2}(\Omega)]^3$ . Potom pomocí Hölderovy věty a věty o stopách dostáváme

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \int_{\Omega} |F \cdot v| \, dx + \int_{\Gamma_1} |f \cdot v| \, dS \\ &\leq \int_{\Omega} |F| |v| \, dx + \int_{\Gamma_1} |f| |v| \, dS \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |F|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Gamma_1} |f|^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Gamma_1} |v|^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}} \\ (4.13) \quad |L(v)| &\leq \left( \|F\|_{0,2} + c_1 \|f\|_{0,2} \right) \|v\|_{1,2} \quad \forall v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3, \end{aligned}$$

kde  $c_1 > 0$  je kladná konstanta z věty 2.5 (o stopách). □

**Lemma 4.2.** *Zobrazení  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definované pomocí (4.9) je spojitá, symetrická a  $V$ -eliptická bilineární forma za předpokladu  $\mu(\Gamma_0) > 0$ .*

*Důkaz.* Nejdříve ověříme, že  $a$  je spojitá ve  $V$ :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx \right| \leq \\ &\stackrel{(3.9)}{\leq} (3\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} |\varepsilon(u)| |\varepsilon(v)| \, dx \leq (3\lambda + 2\mu) \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ (4.14) \quad |a(u, v)| &\leq (3\lambda + 2\mu) \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Při odvození jsme použili nerovnost  $|\varepsilon(v)| \leq |\nabla v|$ , která je důsledkem (2.1). V-elipticitu ověříme pomocí Kornovy nerovnosti. Dostáváme:

$$(4.15) \quad a(v, v) = \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(v) : \varepsilon(v) \, dx \stackrel{(3.8)}{\geq} 2\mu \int_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 \, dx \geq 2\mu c_2 \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in V.$$

Protože  $\mathbb{C} \in \text{Lin}3S$ , platí  $\mathbb{C}\varepsilon(v) : \varepsilon(u) = \mathbb{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v)$ , a proto je  $a$  symetrická ve  $V$ .  $\square$

Užitím lemmat 4.1 a 4.2 lze snadno odvodit následující výsledek.

**Lemma 4.3.** *Funkcionál  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$  je ryze konvexní, koercivní, spojitý a  $G$ -diferencovatelný ve  $V$ . navíc  $J'(u, v) = a(u, v) - L(v)$ .*

Pomocí vět 2.1, 2.2 a 2.3 dostáváme existenci a jednoznačnost řešení.

**Věta 4.1.** *Funkce  $u \in V$  řeší (4.8) právě tehdy, když řeší (4.12). Obě úlohy (4.8) a (4.12) mají právě jedno řešení.*

**4.3. Poznámky k řešitelnosti pružně-perfektně plastického modelu.** V případě pružně-perfektně plastického modelu uvažujeme úlohy (4.6) a (4.7), ve kterých jsou funkce  $T_B$  a  $\Psi_B$  definovány pomocí (3.14) a (3.17). Ukážeme, že obě úlohy jsou dobře definovány a navzájem ekvivalentní.

Z předešlé sekce již víme, že funkcionál  $L$  definovaný pomocí (4.10) je spojitý a lineární ve  $V$ . Dále platí následující dvě tvrzení.

**Lemma 4.4.** *Existuje kladná konstanta  $c > 0$  taková, že*

$$(4.16) \quad \int_{\Omega} T_B(\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, dx \leq c \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \quad \forall u, v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3.$$

Dosadíme-li (3.44) do (4.6) dostáváme slabou formulaci pružně-perfektně plastické úlohy.

*Důkaz.* Z lemmatu 3.2(4) víme, že  $T_B$  je lipschitzovsky spojitá a dále také  $T_B(0) = 0$ . Pak

$$(4.17) \quad |T_B(\varepsilon(u))| \leq |T_B(\varepsilon(u)) - T_B(0)| \stackrel{(3.16)}{\leq} \ell |\varepsilon(u)|$$

Můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} T_B(\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, dx \right| &\leq (3\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} \ell |\varepsilon(u)| |\varepsilon(v)| \, dx \\ &\leq \ell(3\lambda + 2\mu) \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \ell(3\lambda + 2\mu) \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \quad \forall u, v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 4.5.** *Platí*

$$(4.18) \quad \int_{\Omega} \Psi_B(\varepsilon(v)) \, dx \leq \ell \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in [W^{1,2}(\Omega)]^3.$$

Dále funkcionál  $J(v) := \int_{\Omega} \Psi_B \varepsilon(v) \, dx - L(v)$  je konvexní, spojitý a  $G$ -diferencovatelný, přičemž

$$(4.19) \quad J'(u, v) = \int_{\Omega} T_B(\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, dx - L(v).$$

*Důkaz.*

(1) Ukážeme, že  $J$  je dobře definovaný:

$$\left| \int_{\Omega} \Psi_B(\varepsilon(v)) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\Psi_B(\varepsilon(v))| \, dx \stackrel{(3.17), (4.17)}{\leq} c_3 \int_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 \, dx \leq c_3 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

(2) Z lemma 3.2(6) vyplývá, že  $J$  je konvexní ve  $V$ .

(3) Spojitost  $J$  ve  $V$  odvodíme následovně:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Psi_B(\varepsilon(v_n)) \, dx - L(v) \stackrel{(\text{??})}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_B(\varepsilon(v_n)) \, dx - L(v) = \\ &= \int_{\Omega} \Psi_B(\varepsilon(v)) \, dx - L(v) = J(v) \end{aligned}$$

(4) G-diferenciál funkcionálu  $J$  v bodě  $u$  a směru  $v$  dokážeme následovně:

$$\begin{aligned} J'(u, v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (J(u + tv) - J(u)) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{t} (\Psi_B(\varepsilon(u) + t\varepsilon(v)) - \Psi_B(\varepsilon(u))) \, dx - L(v) = \\ &\stackrel{(4.16), (4.18)}{=} \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_B(\varepsilon(u) + t\varepsilon(v)) - \Psi_B(\varepsilon(u))) \, dx - L(v) = \\ &\stackrel{(\text{lemma 3.2})}{=} \int_{\Omega} T_B(\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, dx - L(v) \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

□

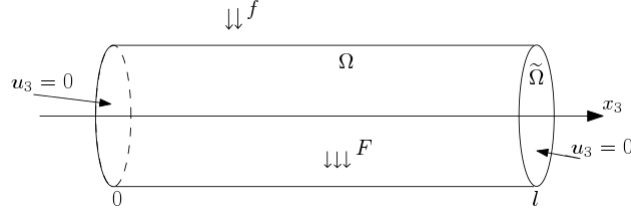
Užitím věty 2.3 dostáváme, že řešení existuje a je jednoznačné.

**Věta 4.2.** *Funkce  $u \in V$  řeší úlohu (4.6) právě tehdy, když řeší úlohu (4.7).*

Bohužel pro pružně-perfektně plastický model neplatí, že  $J$  je koercivní na  $V$ . Řešitelnost (4.7) se studuje na tzv. BD prostorech a existence řešení závisí na velikosti zatížení. Více informací lze nalézt v knize [10].

## 5. ÚLOHA ROVINNÉ DEFORMACE

Při implementaci v Matlabu se budeme zabývat pouze dimenzionálně redukovanou úlohou, tzv. *úlohou rovinné deformace*. Tato úloha je detailněji popsána v [7]. Vyjdeme z klasické úlohy (3.1)-(3.5) a uvedeme předpoklady umožňující redukci problému do 2D.



OBRÁZEK 5.1. Schéma úlohy rovinné deformace

Mějme válcovitou oblast  $\Omega = \tilde{\Omega} \times (0, l) \subset \mathbb{R}^3$ , kde  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}^2$  a  $x_3 \in (0, l)$ , viz Obrázek 5.1. Předpokládejme, že  $\tilde{\Omega}$  je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí  $\partial\tilde{\Omega}$ . Objemové síly uvažujeme ve tvaru  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , kde  $F_1 = F_1(x_1, x_2)$ ,  $F_2 = F_2(x_1, x_2)$  a  $F_3 = 0$ . Povrchové síly předepisujeme obdobně, tj.  $f = (f_1, f_2, f_3)$ , kde  $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2 = f_2(x_1, x_2)$  a  $f_3 = 0$ . Dále nechť  $u_3 = 0$  na podstavách válce:  $\tilde{\Omega} \times \{0\}$ ,  $\tilde{\Omega} \times \{l\}$ . Na části pláště  $\tilde{\Gamma}_0 \times (0, l)$ , kde  $\tilde{\Gamma}_0 \subset \partial\tilde{\Omega}$ , jsou předepsány Dirichletovy okrajové podmínky, a na  $\tilde{\Gamma}_1 \times (0, l)$ , kde  $\tilde{\Gamma}_1 \subset \partial\tilde{\Omega}$ , Neumannovy okrajové podmínky. Bude platit, že  $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1$ ,  $\tilde{\Gamma}_0 \cap \tilde{\Gamma}_1 = \emptyset$  a  $\mu(\tilde{\Gamma}_0) > 0$ . Díky těmto předpokladům se těleso chová v libovolném řezu stejně (stejně posuny) a neznámé posuny jsou ve tvaru  $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ ,  $u_3 = 0$ . Klasická formulace úlohy, tak bude vypadat následovně: *Hledáme  $\tilde{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i &= 0 \quad \text{v } \tilde{\Omega}, \quad i = 1, 2, \\ \sum_{j=1,2} \sigma_{ij} \nu_j &= f_i \quad \text{na } \tilde{\Gamma}_1, \\ \tilde{u} &= 0 \quad \text{na } \tilde{\Gamma}_0, \\ \varepsilon &= \varepsilon(\tilde{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^T) \quad \text{v } \tilde{\Omega}, \\ \sigma &= T_B(\varepsilon(\tilde{u})) \quad \text{v } \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Abychom nemuseli měnit konstitutivní vztahy, tak tenzory napětí a deformace ponecháme tří-rozměrné. Rozborem vztahu mezi tenzory posunutí a deformací odvodíme:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) &= \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2) &= \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \right),\end{aligned}$$

a  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ . Rozepíšeme-li konstitutivní vztah pro úlohu lineární pružnosti, pak pro jednotlivé složky  $\sigma$  dostaneme:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= 2\mu\varepsilon_{12} = 2\mu\varepsilon_{21}, \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} &= 2\mu\varepsilon_{13} = 2\mu\varepsilon_{31}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),\end{aligned}$$

a  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ , tj.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že složku  $\sigma_{33}$  můžeme vyredukovat v rámci lineární pružnosti, neboť  $\sigma : \varepsilon = \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ . Nicméně v elastoplastickém modelu  $\sigma_{33}$  ovlivňuje plastické kritérium. Slabá formulace úlohy bude formulována podobně jako pro 3D problém: *Hledáme*  $\tilde{u} = \tilde{V}$ :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{C}\varepsilon(\tilde{u}) : \varepsilon(\tilde{v}) \, dx = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{F} \cdot \tilde{v} \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_1} \tilde{f} \cdot \tilde{v} \, ds \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

kde

$$\tilde{V} = \{\tilde{v} \in [W^{1,2}(\tilde{\Omega})]^2 \mid \tilde{v} = 0 \text{ skoro všude na } \tilde{\Gamma}_0\}, \quad \tilde{v} = (v_1, v_2), \quad \tilde{F} = (F_1, F_2), \quad \tilde{f} = (f_1, f_2).$$

Máme analogické výsledky popisující existenci a jednoznačnost řešení jako pro 3D úlohu. V dalším textu budeme vynechávat pro jednoduchost vlnky nad symboly, abychom nemuseli rozlišovat mezi 2D a 3D problémy.

## 6. DISKRETIZACE ÚLOHY ROVINNÉ DEFORMACE

Při počítačové implementaci nemůžeme pracovat s nekonečně dimenzionálními prostory, a proto musíme přistoupit k aproximaci úlohy do konečné dimenze. Diskretizaci nejdříve představíme abstraktně na základě Ritzovy metody. V této kapitole shrnujeme výsledky z [2, 3, 5, 7].

Nechť máme oblast  $\Omega_h \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , která vznikne aproximací oblasti  $\Omega$ . Prostor testovacích funkcí  $V$  pak aproximujeme prostorem  $V_h \subset V$ , který je konečně rozměrný podprostor prostoru  $V$ . Dále nechť je  $L_h : V_h \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá lineární forma na  $V_h$ , pomocí které aproximujeme  $L$ . Pak můžeme diskrétní tvar problému (4.6) zapsat následovně. Hledáme  $u_h \in V_h$

$$(6.1) \quad \int_{\Omega_h} T_B(\varepsilon(u_h)) : \varepsilon(v_h) \, dx = L_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Odpovídající minimalizační problém je ve tvaru: Hledáme  $u_h \in V_h$  takové, že

$$(6.2) \quad J_h(u_h) \leq J_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Existenci a jednoznačnost řešení úloh (6.1) a (6.2) můžeme opět vyšetřovat pomocí vět 2.1, 2.2 a 2.3. Konvergenci Ritzovy metody můžeme vyšetřovat pomocí následujícího obecného výsledku.

**Lemma 6.1.** *Nechť existují řešení  $u_h$  a  $u$  příslušných úloh (6.2) a (4.7) pro každé  $h$  a nechť  $\{V_h\}_h$  je hustý ve  $V$ , tj.  $\forall v \in V \quad \exists \{v_h\}_h, v_h \in V_h : v_h \rightarrow v$  ve  $V$  pro  $h \rightarrow 0$ . Předpokládejme také, že  $J_h = J$ ,  $L_h = L$  a  $J$  je spojitý ve  $V$ . Potom*

$$\lim_{h \rightarrow 0} J(u_h) = J(u).$$

*Důkaz.* (viz [5]) Mějme  $u$ , které řeší (4.7) tj.  $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V$ . Potom  $J(u) \leq J(u_h)$ , kde  $u_h$  řeší (6.2). Z hustoty  $\{v_h\}$  ve  $V$  vyplývá existence  $\{v_h\}_h, v_h \in V_h$  takové, že  $v_h \rightarrow u$  ve  $V$  pro  $h \rightarrow 0$ . Protože  $u_h$  řeší (6.2), máme  $J(u_h) \leq J(v_h)$  pro každé  $h > 0$ . Využijeme-li nyní předpokladu, že  $J$  je spojitý ve  $V$  nebo-li  $J(v_h) \rightarrow J(u)$  pro  $h \rightarrow 0$ , tak celkově dostaneme  $J(u) \leq J(u_h) \leq J(v_h) \rightarrow J(u)$  pro  $h \rightarrow 0$ , a tedy  $\lim_{h \rightarrow 0} J(u_h) = J(u)$ .  $\square$

**6.1. Ritzova metoda pro lineární pružnost.** Pro jednoduchost předpokládejme  $\Omega_h = \Omega$ ,  $L_h = L$  a  $J_h = J$ . Protože  $V_h$  je uzavřený podprostor  $V$ , je bilineární forma  $a$  symetrická, spojitá a V-eliptická také ve  $V_h$ . Úlohy (6.1) a (6.2) tak mají právě jedno totožné řešení  $u_h \in V_h$ . Nyní doplníme lemma 6.1 o silnější konvergenční výsledek.

**Věta 6.1.** *Nechť  $u \in V$  řeší úlohu (4.12), a  $\{u_h\}_h$  je posloupnost taková, že  $u_h \in V_h$  řeší (6.2). Potom  $u_h \rightarrow u$  ve  $V$  pro  $h \rightarrow 0$ .*

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} J(u_h) - J(u) &= \frac{1}{2}a(u_h, v_h) - \frac{1}{2}a(u, v) - L(u_h - u) = \\ &\stackrel{(4.8)}{=} \frac{1}{2}a(u_h, v_h) - \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, u_h - u) = \\ &= \frac{1}{2}a(u_h, v_h) + \frac{1}{2}a(u, u) - a(u_h, u) = \\ &= \frac{1}{2}a(u_h - u, u_h - u) \geq \frac{q}{2} \|u_h - u\|_{1,2}^2 \quad q > 0. \end{aligned}$$

Protože funkcionál  $J$  je pro úlohu lineární pružnosti spojitý, pomocí lemma 6.1 dostáváme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{1,2}^2 \leq \frac{2}{q} \lim_{h \rightarrow 0} (J(u_h) - J(u)) = 0. \text{ Tedy } u_h \rightarrow u \text{ ve } V \text{ pro } h \rightarrow 0.$$

□

Nyní odvodíme algebraický tvar úlohy lineární pružnosti. Mějme danou bázi  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  prostoru  $V_h$ . Potom testovací funkce  $v_h \in V_h$  můžeme zapsat ve tvaru:  $v_h(x) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x)$ . Odtud

$$\begin{aligned} J(v_h) &= J\left(\sum_{i=1}^n v_i \varphi_i\right) = \frac{1}{2} a\left(\sum_{i=1}^n v_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n v_j \varphi_j\right) - L\left(\sum_{i=1}^n v_i \varphi_i\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j a(\varphi_i, \varphi_j) - \sum_{i=1}^n v_i L(\varphi_i). \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zápisu označíme  $\vec{v} := (v_1, \dots, v_n)^T$  a definujeme  $\tilde{J}(\vec{v}) = J(v_h) = \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} - \vec{f}^T \vec{v}$ , kde  $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$  a  $f_i = L(\varphi_i)$ .  $A$  je symetrická, pozitivně definitní matice, protože  $a$  je symetrická a V-eliptická. Řešení  $u_h$  úlohy (6.2) tedy bude ve tvaru  $u_h = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i$ ,  $\vec{u} := (u_1, \dots, u_n)^T$ . Z toho plyne, že

$$(6.3) \quad \tilde{J}(\vec{u}) \leq \tilde{J}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n,$$

což je ekvivalentní se systémem lineárních rovnic  $A\vec{u} = \vec{f}$ . Řešíme tedy systém lineárních rovnic se symetrickou pozitivně definitní maticí.

**6.2. Ritzova metoda u perfektní plasticity.** U pružně-perfektně plastické úlohy má funkcionál  $J$  tvar  $J(v) = \int_{\Omega} \Psi(\varepsilon(v)) \, dx - L(v)$ , kde  $J$  je spojitý, G-diferencovatelný a konvexní ve  $V$ , ale nemusí být koercivní. Naznačíme, jak lze dokázat koercivitu  $J$  na diskretním prostoru  $V_h$ .

**Lemma 6.2.** (*viz [6]*)

$$\exists c_1 > 0, c_2 \in \mathbb{R} : \Psi_B(\varepsilon) \geq c_1 |\varepsilon| + c_2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}.$$

Z lemma 6.2 plyne, že

$$J(v_h) \geq c_1 \int_{\Omega} |\varepsilon(v_h)| \, dx + c_2 |\Omega| - \|L\|_{V^*} \|v_h\|_{1,2} \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde  $\|\cdot\|_{V^*}$  je norma v duálním prostoru k  $V$ . Protože na konečném prostoru jsou normy ekvivalentní, platí:

$$\exists \tilde{c}_3 > 0, \tilde{c}_3 = \tilde{c}_3(h) : \int_{\Omega} |\varepsilon(v_h)| \, dx \geq \tilde{c}_3 \left( \int_{\Omega} |\varepsilon(v_h)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Užitím věty 2.7 (Kornova nerovnost) odtud dostáváme

$$(6.4) \quad \exists c_3 > 0, c_3 = c_3(h) : \int_{\Omega} |\varepsilon(v_h)| \, dx \geq c_3 \|v_h\|_{1,2} \quad \forall v_h \in V_h.$$

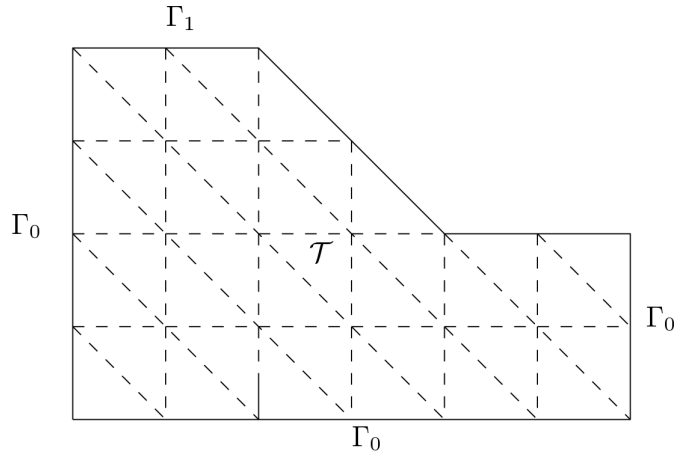
Po dosazení máme

$$J(v_h) \geq (c_1 c_3 - \|L\|_{V^*}) \|v_h\|_{1,2} + c_2 |\Omega| \quad \forall v_h \in V_h.$$

Dostáváme tedy, že jestliže je zatížení dostatečně malé tak, že  $\|L\|_{V^*} < c_1 c_3$ , potom je funkcionál  $J$  koercivní ve  $V_h$  a následně má úloha (6.2) řešení.

## 7. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ LAGRANGEOVA TYPU PRO 2D PROBLÉM

Pro řešení pružně-perfektně plastických problémů se obvykle volí konečné prvky vyšších řádů, které vykazují lepší konvergenční vlastnosti. Proto se budeme v této kapitole věnovat izoparametrickým prvkům Lagrangeova typu (viz [1]), které zahrnují  $P_k$  nebo  $Q_k$  prvky,  $k = 1, 2, \dots$ . Pro jednoduchost budeme uvažovat 2D úlohu a trojúhelníkovou triangulaci  $\Omega$ , tedy omezíme se pouze na  $P_k$  prvky. Cílem této kapitoly je vyskládat matici tuhosti pro úlohu lineární pružnosti. Uvedený postup založený na izoparametrické transformaci je ale univerzální a snadno může být rozšířen i pro čtyřúhelníkové  $Q_k$  prvky, prvky se zakřivenými hranami a také pro 3D úlohy. Vyskládání matic v elasto-plasticitě je obdobné, viz [3]. V této kapitole vycházíme hlavně z [9].



OBRÁZEK 7.1. Příklad triangulace oblasti  $\Omega$

Pro jednoduchost předpokládáme, že  $\Omega = \Omega_h \subset \mathbb{R}^2$  je polygonální oblast a že Dirichletovy a Neumannovy podmínky jsou uvažovány vždy pouze na celých hranách. Triangulaci oblasti  $\Omega$  značíme jako  $\mathcal{T}_h$ . Triangulace bude pokrývat celou oblast, tedy  $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ . Dále požadujeme, aby  $\text{int } T \cap \text{int } \bar{T} = \emptyset$ ,  $\forall T, \bar{T} \in \mathcal{T}_h$  a také, aby hrana libovolného  $T \in \mathcal{T}_h$  byla buď hrana jiného  $T' \in \mathcal{T}_h$  nebo části  $\partial\Omega$ , viz Obrázek 7.1. Označíme prostor polynomů  $k$ -tého řádu na trojúhelníku  $T \in \mathcal{T}_h$  jako  $P_k(T)$ , pro  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Například  $\dim P_1(T) = 3$  a  $\dim P_2(T) = 6$ . Diskretizovaný prostor testovacích funkcí je definovaný následovně:

$$(7.1) \quad V_h = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_h|_{\Gamma_0} = 0, \quad v_h|_T \in [P_k(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

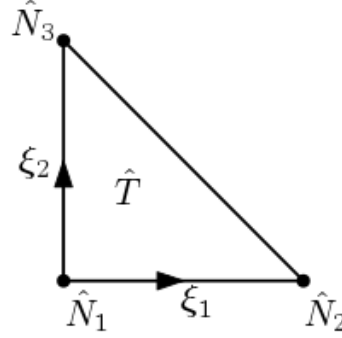
Platí  $V_h \subset V$ . Abychom mohli sestavit bázi prostoru  $V_h$ , budeme potřebovat následující 2 definice.

**Definice 7.1.** *Konečný prvek Lagrangeova typu* je trojice  $(\hat{T}, \hat{S}, \hat{\Sigma})$ , kde  $\hat{T}$  je konvexní polygon (např. trojúhelník),  $\hat{S}$  je konečný dimenzionální prostor funkcí nad  $\hat{T}$  takových, že  $\dim \hat{S} = n_p$ , a  $\hat{\Sigma}$  je množina různých bodů  $\hat{N}_1, \hat{N}_2, \dots, \hat{N}_{n_p}$  takových, že existuje báze  $\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_{n_p}\}$  prostoru  $\hat{S}$ , splňující

$$(7.2) \quad \hat{\phi}_p(\hat{N}_q) = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, n_p\}.$$

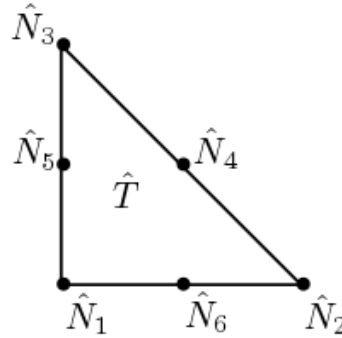
*Poznámka.*  $\hat{T}$  může být libovolný trojúhelník z  $\mathcal{T}_h$ , obvykle však  $\hat{T}$  je tak zvaným referenčním trojúhelníkem, přičemž definujeme transformaci mezi  $T \in \mathcal{T}_h$  a  $\hat{T}$ .

Definice 7.1 se používá také na čtyřúhelníkové prvky nebo i ve 3D. Ilustrujme definici 7.1 na  $P_1$  a  $P_2$  prvcích (elementech).



OBRÁZEK 7.2. Referenční trojúhelník pro  $P_1$  prvek

U  $P_1$  elementu může být referenční trojúhelník  $\hat{T}$  jako na Obrázku 7.2, kde  $\hat{\Sigma} = \{\hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{N}_3\}$ ,  $\hat{N}_1 = [0, 0]$ ,  $\hat{N}_2 = [1, 0]$ ,  $\hat{N}_3 = [0, 1]$ . Dále  $\hat{S} = P_1(\hat{T})$  a báze funkce splňující (7.2) jsou ve tvaru:  $\hat{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1 - \xi_2$ ,  $\hat{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$ ,  $\hat{\phi}_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$ .



OBRÁZEK 7.3. Referenční trojúhelník pro  $P_2$  prvek

Pro  $P_2$  elementy může být referenční trojúhelník  $\hat{T}$  jako na Obrázku 7.3. Množina  $\hat{\Sigma}$  je tvořena body  $\hat{N}_1 = [0, 0]$ ,  $\hat{N}_2 = [1, 0]$ ,  $\hat{N}_3 = [0, 1]$ ,  $\hat{N}_4 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $\hat{N}_5 = [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\hat{N}_6 = [\frac{1}{2}, 0]$ . Dále  $\hat{S} = P_2(\hat{T})$  a báze funkce splňující (7.2) můžeme psát ve tvaru:  $\hat{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_0(1 - 2\xi_0)$ ,  $\hat{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1 - 2\xi_1)$ ,  $\hat{\phi}_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(1 - 2\xi_2)$ ,  $\hat{\phi}_4(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_0\xi_1$ ,  $\hat{\phi}_5(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_1\xi_2$ ,  $\hat{\phi}_6(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_0\xi_2$ , kde  $\xi_0 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ .

Nyní přistoupíme k izoparametrické transformaci Lagrangeova prvku  $\hat{T}$  na prvek  $T \in \mathcal{T}_h$ .

**Definice 7.2.** Necht  $(\hat{T}, \hat{S}, \hat{\Sigma})$  je daný konečný prvek, kde  $\hat{\Sigma} = \{\hat{N}_1, \hat{N}_2, \dots, \hat{N}_{n_p}\}$  a  $\hat{S} = \text{lin}\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_{n_p}\}$ . Necht dále je dána množina bodů  $\Sigma_T := \{N_{T,1}, N_{T,2}, \dots, N_{T,n_p}\} \subset \mathbb{R}^2$ . Potom zobrazení

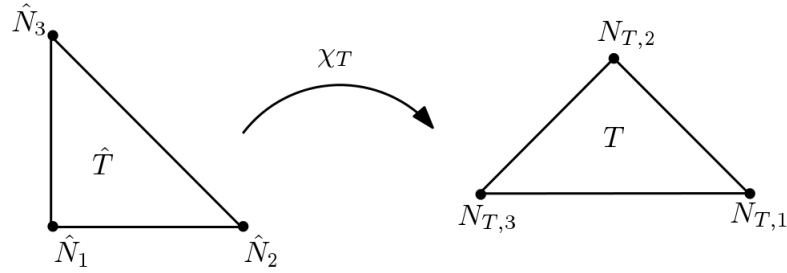
$$(7.3) \quad \chi_T(\xi) = \sum_{p=1}^{n_p} \hat{\phi}_p(\xi) N_{T,p}, \quad \det(\nabla \chi_T(\xi)) > 0 \quad \forall \xi \in \hat{T},$$

nazýváme *izoparametrickou transformací* prvku  $(\hat{T}, \hat{S}, \hat{\Sigma})$  na prvek  $(T, S_T, \Sigma_T)$ , kde

$$T := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \xi \in \hat{T} : x = \chi_T(\xi) \right\}, \quad S_T = \text{lin} \{ \phi_{T,1}, \phi_{T,2}, \dots, \phi_{T,n_p} \} \text{ a}$$

$$(7.4) \quad \phi_{T,p}(x) = \hat{\phi}_p(\chi_T^{-1}(x)), \quad x \in T.$$

Dále zavedeme značení  $J_T(\xi) := \nabla \chi_T(\xi)$ ,  $\xi \in \hat{T}$ . Poznamenejme, že předpoklad  $\det J_T(\xi) > 0$   $\forall \xi \in \hat{T}$  zaručuje existenci funkce  $\chi_T^{-1}$ . Pro izoparametrickou transformaci platí, že  $N_{T,p} = \chi_T(\hat{N}_p) \forall p \in \{1, 2, \dots, n_p\}$  a  $J_T(\xi) = \sum_{p=1}^{n_p} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial \xi_1} N_{T,p}, \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial \xi_2} N_{T,p} \right) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Ukažme si, jak taková transformace vypadá pro  $P_1$  a  $P_2$  prvky.

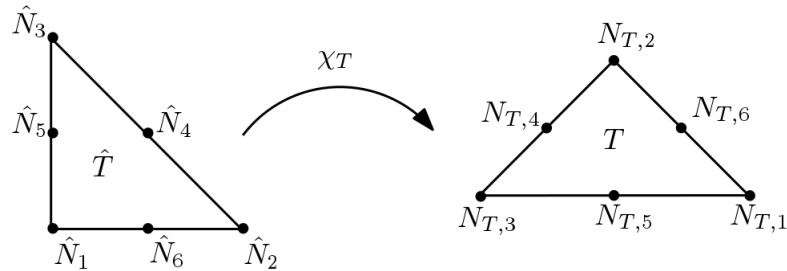


OBRÁZEK 7.4. Izoparametrická transformace pro  $P_1$  element

U  $P_1$  prvků předpokládejme, že body  $N_{T,1}, N_{T,2}, N_{T,3}$  neleží v rovině, definují vrcholy trojúhelníku  $T$  a mají levotočivé číslování vůči  $T$  viz Obrázek 7.4. Potom

$$\begin{aligned} \chi_T(\xi) &= \hat{\phi}_1(\xi)N_{T,1} + \hat{\phi}_2(\xi)N_{T,2} + \hat{\phi}_3(\xi)N_{T,3} = \\ &= \xi_0 N_{T,1} + \xi_1 N_{T,2} + \xi_2 N_{T,3} = \\ &= (N_{T,2} - N_{T,1}) \xi_1 + (N_{T,3} - N_{T,1}) \xi_2 + N_{T,1} = \\ \chi_T(\xi) &= J_T(\xi) \xi + N_{T,1}, \end{aligned}$$

kde  $J_T(\xi) = \nabla \chi_T(\xi) = (N_{T,2} - N_{T,1}, N_{T,3} - N_{T,1})$ . Díky výše uvedeným předpokladům na body  $N_{T,1}, N_{T,2}, N_{T,3}$  platí  $\det J_T(\xi) > 0$ . V případě  $P_1$  elementů se jedná tedy o afinní transformaci.



OBRÁZEK 7.5. Izoparametrická transformace pro  $P_2$  element

Izoparametrická transformace pro  $P_2$  prvky je znázorněna na Obrázku 7.5. Pokud body  $N_{T,1}, N_{T,2}, N_{T,3}$  jsou vrcholy trojúhelníku  $T$ ,  $N_{T,4} = \frac{1}{2}(N_{T,2} + N_{T,3})$ ,  $N_{T,5} = \frac{1}{2}(N_{T,1} + N_{T,3})$ ,  $N_{T,6} = \frac{1}{2}(N_{T,1} + N_{T,2})$  jsou středy stran  $T$  a pokud je zachováno číslování jako na Obrázku 7.5, potom  $\det J_T(\xi) > 0$  a

$$\begin{aligned}
\chi_T(\xi) &= \hat{\phi}_1 N_{T,1} + \hat{\phi}_2 N_{T,2} + \hat{\phi}_3 N_{T,3} + \hat{\phi}_4 N_{T,4} + \hat{\phi}_5 N_{T,5} + \hat{\phi}_6 N_{T,6} = \\
&= \hat{\phi}_1 N_{T,1} + \hat{\phi}_2 N_{T,2} + \hat{\phi}_3 N_{T,3} + \hat{\phi}_4 \frac{1}{2} (N_{T,2} + N_{T,3}) + \\
&\quad + \hat{\phi}_5 \frac{1}{2} (N_{T,1} + N_{T,3}) + \hat{\phi}_6 \frac{1}{2} (N_{T,1} + N_{T,2}) = \\
&= \left( \hat{\phi}_1 + \frac{1}{2} \hat{\phi}_5 + \frac{1}{2} \hat{\phi}_6 \right) N_{T,1} + \left( \hat{\phi}_2 + \frac{1}{2} \hat{\phi}_4 + \frac{1}{2} \hat{\phi}_6 \right) N_{T,2} + \left( \hat{\phi}_3 + \frac{1}{2} \hat{\phi}_4 + \frac{1}{2} \hat{\phi}_5 \right) N_{T,3} = \\
\chi_T(\xi) &= \xi_0 N_{T,1} + \xi_1 N_{T,2} + \xi_2 N_{T,3}.
\end{aligned}$$

Za výše uvedených předpokladů jsme odvodili, že  $\chi_T$  je opět afinní transformace shodná s  $P_1$  prvky. Pokud ovšem oblast  $\Omega$  má zakřivenou hranici, body  $N_{T,4}, N_{T,5}, N_{T,6}$  nemusí být středy  $T$ . Tím docílíme, že  $T$  bude zakřivený trojúhelník a funkce  $\chi_T$  již nebude lineární.

Nyní přejdeme ke konstrukci lokálních a globálních bazických funkcí prostoru  $V_h$ . Mějme bazické funkce  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_{n_p}$  na referenčním elementu  $\hat{T}$  a lokální bazické funkce na  $\phi_{T,1}, \phi_{T,2}, \dots, \phi_{T,n_p}$  definované na  $T$  pomocí (7.4)

$$(7.5) \quad \hat{\phi}_{T,p}(x) = \hat{\phi}_p(\chi_T^{-1}(x)) = \hat{\phi}_p(\xi) \quad \forall x \in T \quad \forall p \in \{1, \dots, n_p\}.$$

Globální bazické funkce pak získáme skládáním lokálních bazických funkcí. Definujme množinu všech bodů jako  $\mathcal{N} := \{N \in \hat{\Omega} \mid \exists T \in \mathcal{T}_h, \exists p \in \{1, \dots, n_p\} : N = N_{T,p}\} = \{N_1, N_2, \dots, N_{n_n}\}$ . Globální funkce  $\phi_j : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $j = 1, \dots, n_n$  pak mají následující tvar:

$$(7.6) \quad \phi_j|_T = \begin{cases} \phi_{T,p}, & \text{jestliže } \exists p \in \{1, \dots, n_p\} : N_j = N_{T,p}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Prostor generovaný bazickými funkcemi  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_n}$  pak budeme značit  $H_h$ , to je  $H_h = \text{lin} \{\phi_1, \dots, \phi_{n_n}\}$ .

**Definice 7.3.** Říkáme, že konečný prvek  $(\hat{T}, \hat{S}, \hat{\Sigma})$  je *konformní*, jestliže bazické funkce  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_n}$  získané pomocí (7.5) a (7.6) jsou spojitě v  $\Omega = \Omega_h$ .

Poznamenejme, že uvedené příklady  $P_1$  a  $P_2$  elementů vedou na spojitě bazické funkce  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_n}\}$ . Podobně také prvky vyšších řádů  $P_3, P_4, \dots$  jsou konformní. Pro  $P_k$  prvky tedy platí

$$H_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \in P_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Podívejme se nyní na bazické funkce pro vektorové funkce

$$H_h^2 = H_h \times H_h = \text{lin} \{(\phi_1, 0), (0, \phi_1), \dots, (\phi_{n_n}, 0), (0, \phi_{n_n})\}.$$

Pro  $P_k$  elementy bude prostor  $H_h^2$  splňovat

$$H_h^2 = \{v_h \in [C(\bar{\Omega})]^2 \mid v_h|_T \in [P_k(T)]^2\}.$$

Bazické funkce prostoru  $V_h$  můžeme rozdělit podle vrcholů na dvě části. Na část, kde vrcholy leží na Dirichletově části hranice:  $I_D := \{j \in \{1, 2, \dots, n_n\} : N_j \in \Gamma_0\}$  a na zbývající vrcholy  $I_Q := \{j \in \{1, 2, \dots, n_n\} : N_j \notin \Gamma_0\}$ , kde  $I_D \cap I_Q = \emptyset$  a  $I_D \cup I_Q = \{1, 2, \dots, n_n\}$ . Prostor  $V_h$  definovaný pomocí (7.1) pak lze psát následovně:

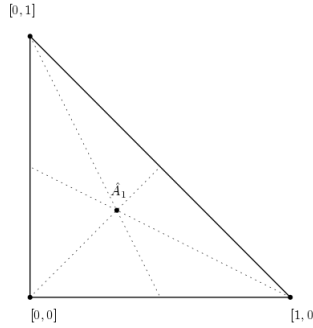
$$V_h = \{v_h \in [C(\bar{\Omega})]^2 : v_h = 0 \text{ na } \Gamma_0, v_h|_T \in (P_k(T)) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

kde  $V_h = \text{lin} \{(\phi_j, 0), (0, \phi_j), \quad j \in I_Q\}$ ,  $\dim V_h = 2 \text{card}(I_Q)$ .

Izoparametrické konečné prvky se obvykle doplňují numerickou integrací. Ta je nezbytná při výskytu zakřivených trojúhelníků, obecných čtyřúhelníků nebo u pružně-perfektně plastické úlohy. Numerickou integraci nejprve zavedeme na referenčním prvku  $(\hat{T}, \hat{S}, \hat{\Sigma})$  a pak rozšíříme na  $T \in \mathcal{T}_h$ . Numerickou integraci funkce  $g \in C(\hat{T})$  můžeme obecně zapsat následovně:

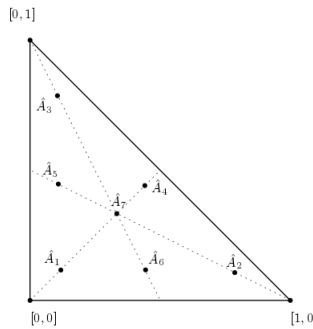
$$(7.7) \quad \int_{\hat{T}} g(\xi) \, d\xi \approx \sum_{q=1}^{n_q} \hat{\omega}_q g(\hat{A}_q),$$

kde  $n_q$  je počet kvadrturních bodů,  $\hat{A}_q$  jsou souřadnice kvadrturních bodů a  $\hat{\omega}_q$  jsou váhové koeficienty. Uvedme pro ilustraci 1-bodovou a 7-bodovou Gaussovu kvadraturu na trojúhelníku.



OBRÁZEK 7.6. 1-bodová Gaussova kvadratura

U 1-bodové kvadratury, viz Obrázek 7.6 jsou souřadnice bodu  $\hat{A}_1 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  a váhový koeficient  $\hat{\omega}_1 = \frac{1}{2}$ . Numerická integrace tedy vypadá následovně  $\int_{\hat{T}} g(\xi) \, d\xi \approx \frac{1}{2} g(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Tento typ Gaussovy kvadratury je dostatečný pro  $P_1$  elementy.



OBRÁZEK 7.7. 7-bodová Gaussova kvadratura

U 7-bodové kvadratury, viz Obrázek 7.7, můžeme souřadnice bodů zapsat díky pomocnému značení  $a_1 = \frac{1}{21}(9 + 2\sqrt{15})$ ,  $a_2 = \frac{1}{21}(9 - 2\sqrt{15})$ ,  $b_1 = \frac{1}{21}(6 - \sqrt{15})$ ,  $b_2 = \frac{1}{21}(6 + \sqrt{15})$  ve tvaru  $\hat{A}_1 = [b_1, b_1]$ ,  $\hat{A}_2 = [a_1, b_1]$ ,  $\hat{A}_3 = [b_1, a_1]$ ,  $\hat{A}_4 = [b_2, b_2]$ ,  $\hat{A}_5 = [a_2, b_2]$ ,  $\hat{A}_6 = [b_2, a_2]$  a  $\hat{A}_7 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ . Váhové koeficienty jsou ve tvaru:  $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_3 = \frac{155 - \sqrt{15}}{1200}$ ,  $\hat{\omega}_4 = \hat{\omega}_5 = \hat{\omega}_6 = \frac{155 + \sqrt{15}}{1200}$  a  $\hat{\omega}_7 = \frac{9}{40}$ . Tento typ Gaussovy kvadratury je vhodný pro  $P_2$  elementy nebo elementy vyššího řádu.



Pomocí substituce  $x = \chi_T(\xi)$ ,  $dx = |\det J_T(\xi)| d\xi$  a (7.7) dostáváme numerickou integraci na  $T \in \mathcal{T}_h$ :

$$\begin{aligned} \int_T g(x) dx &= \int_{\hat{T}} g(\chi_T(\xi)) |\det J_T(\xi)| d\xi \approx \sum_{q=1}^{n_q} g(A_{T,q}) |\det J_T(\hat{A}_q)| \hat{\omega}_q \approx \\ &\approx \sum_{q=1}^{n_q} \omega_{T,q} g(A_{T,q}), \end{aligned}$$

kde  $A_{T,q} = \chi_T(\hat{A}_q) \in T$ , a  $\omega_{T,q} = \hat{\omega}_q |\det J_T(\hat{A}_q)|$ ,  $q = 1, 2, \dots, n_q$ .

Pro derivace lokálních bazických funkcí v integračních bodech pak dostáváme:

$$(7.8) \quad \frac{\partial \phi_{T,p}(A_{T,q})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^2 [J_T(\hat{A}_q)]_{ij}^{-1} \frac{\partial \hat{\phi}_p(\hat{A}_q)}{\partial \xi_j} \quad i = 1, 2, p = 1, 2, \dots, n_p \quad T \in \mathcal{T}_h,$$

kde  $[J_T(\hat{A}_q)]^{-1}$  je inverzní matice k Jakobiánu v bodě  $\hat{A}_q$ .

Úlohu lineární pružnosti máme formulovanou následovně: *Hledáme  $u_h \in V_h$  takové:*

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde  $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(u_h) : \varepsilon(v_h) dx$  a  $L(v_h) = \int_{\Omega} Fv_h dx + \int_{\Gamma_1} fv_h ds$ . Funkce  $u_h$  a  $v_h$  můžeme rozepsat pomocí bazických funkcí:  $u_{h,i}(x) = \sum_{j=1}^{n_n} u_{h,i}(N_j)\phi_j(x)$ ,  $i = 1, 2$  a  $v_{h,i}(x) = \sum_{j=1}^{n_n} v_{h,i}(N_j)\phi_j(x)$ ,  $i = 1, 2$ . Vidíme, že funkce  $u_h$  a  $v_h$  můžeme reprezentovat pomocí vektorů  $\vec{u} = (u_{h,1}(N_1), u_{h,2}(N_1), u_{h,1}(N_2), u_{h,2}(N_2), \dots, u_{h,1}(N_{n_n}), u_{h,2}(N_{n_n}))^T \in \mathbb{R}^{2n_n}$  a  $\vec{v} = (v_{h,1}(N_1), v_{h,2}(N_1), v_{h,1}(N_2), v_{h,2}(N_2), \dots, v_{h,1}(N_{n_n}), v_{h,2}(N_{n_n}))^T \in \mathbb{R}^{2n_n}$ . Víme, že složky  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , které odpovídají Dirichletovým uzlům jsou nulové. Můžeme proto zavést následující restriktce vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ :

$$\vec{\tilde{u}} = (u_{h,1}(N_j), u_{h,2}(N_j), \quad j \in I_Q),$$

$$\vec{\tilde{v}} = (v_{h,1}(N_j), v_{h,2}(N_j), \quad j \in I_Q).$$

Bilineární formu  $a$  můžeme na prostoru  $H_h^2$  reprezentovat pomocí elastické matice tuhosti  $K_{elast} \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$ :

$$\vec{v}^T K_{elast} \vec{u} \approx \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(u_h) : \varepsilon(v_h) dx, \quad u_j = v_j = 0, \quad j \in I_D.$$

Poznamenejme, že matice  $\tilde{K}_{elast}$  odpovídá matici  $A$  z předešlé kapitoly. Opět můžeme zavést restriktci  $\tilde{K}_{elast}$  pomocí vyeliminování řádků a sloupců, které odpovídají Dirichletově okrajové podmínce. Dostáváme tak:

$$\vec{v}^T K_{elast} \vec{u} = \vec{v}^T \tilde{K}_{elast} \vec{\tilde{u}} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{2n_n}.$$

Nyní odvodíme vyskládání matice  $K_{elast}$ . Budeme k tomu potřebovat následující pomocné značení. Restriktci vektoru  $\vec{v}$  na  $T \in \mathcal{T}_h$  značíme  $\vec{v}_T = (v_{h,1}(N_{T,1}), v_{h,2}(N_{T,2}), \dots, v_{h,1}(N_{T,n_p}), v_{h,2}(N_{T,n_p}))^T = R_T \vec{v}$ , kde  $R_T \in \mathbb{R}^{n_p \times 2n_n}$ . Tenzor malých deformací  $\varepsilon$  v bodě  $A_{T,q}$  budeme reprezentovat pomocí vektoru  $\vec{\varepsilon}_{T,q} := (\varepsilon_{11}(A_{T,q}), \varepsilon_{22}(A_{T,q}), 2\varepsilon_{12}(A_{T,q}))^T$ . Vztah mezi deformacemi

a posuny můžeme vyjádřit ve tvaru  $\vec{\varepsilon}_{T,q} = B_{T,q} \vec{v}_T$ , kde matici  $B_{T,q} \in \mathbb{R}^{3 \times n_p}$  lze najít ve tvaru

$$B_{T,q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{T,1}(A_{T,q})}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_{T,3}(A_{T,q})}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_{T,1}(A_{T,q})}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_{T,3}(A_{T,q})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_{T,1}(A_{T,q})}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_{T,1}(A_{T,q})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{T,3}(A_{T,q})}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_{T,3}(A_{T,q})}{\partial x_1} \end{pmatrix},$$

přičemž hodnoty derivací napočítáme pomocí (7.8). Tenzor napětí  $\sigma$  v bodě  $A_{T,q}$  budeme reprezentovat pomocí vektoru  $\vec{\sigma}_{T,q} := (\sigma_{11}(A_{T,q}), \sigma_{22}(A_{T,q}), \sigma_{12}(A_{T,q}))^T$ . Vztah mezi napětím a deformací můžeme vyjádřit ve tvaru  $\vec{\sigma}_{T,q} = C \vec{\varepsilon}_{T,q}$ , kde matici  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , reprezentující algebraický zápis konstitutivního problému, lze najít ve tvaru:

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Vyskládání matice tuhosti pak bude vypadat následovně:

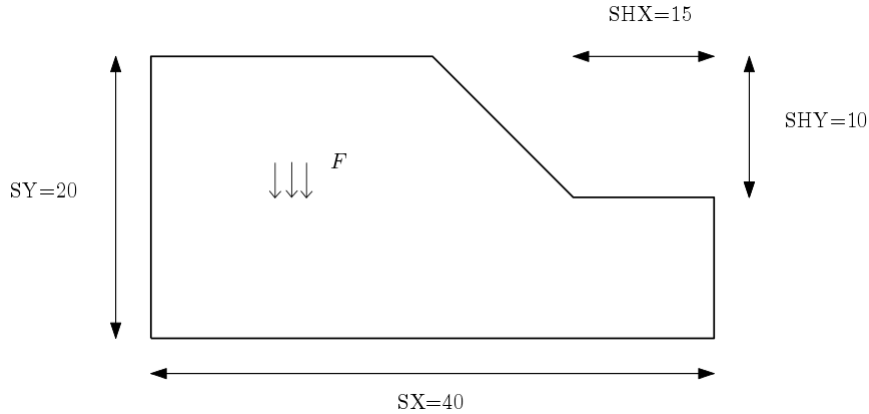
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{C} \varepsilon(u_h) : \varepsilon(v_h) \, dx &\approx \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^{n_q} \omega_{T,q} (C B_{T,q} \vec{u}_T) B_{T,q} \vec{v}_T = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^{n_q} \omega_{T,q} (C B_{T,q} R_T \vec{u}) B_{T,q} R_T \vec{v} = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^{n_q} \omega_{T,q} \vec{v} R_T^T B_{T,q}^T C B_{T,q} R_T \vec{u} = \\ &= \vec{v} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^{n_q} \omega_{T,q} R_T^T B_{T,q}^T C B_{T,q} R_T \right) \vec{u} \quad \forall u_h, v_h \in V_h, \end{aligned}$$

kde  $K_{elast} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^{n_q} \omega_{T,q} R_T^T B_{T,q}^T C B_{T,q} R_T$ .

## 8. NUMERICKÝ PŘÍKLAD

V této kapitole budeme vyšetřovat stabilitu svahu na základě řešení úlohy lineární pružnosti. K posouzení a vyhodnocení napětového stavu použijeme Drucker-Pragerovo plastické kritérium. Cílem je určit zóny v okolí svahů, ve kterých napětí překračuje stanovené kritérium. Tyto zóny zkoumáme v závislosti na velikosti zatížení.

Uvažujeme modelovou úlohu rovinné deformace, která je znázorněna na Obrázku 8.1.



OBRÁZEK 8.1. Schéma modelu

Svah je zatížený pouze vlastní vahou, proto volíme  $f = 0$  a  $F = [0, -20]$  kPa/m. Dále na svislých hranách předepisujeme homogenní Dirichletovu podmínku v normálovém směru, tj.  $u_1 = 0$ . Na spodní hraně zadáváme  $u = (u_1, u_2) = 0$ . Laméovy koeficienty určujeme pomocí (3.7), kde  $E = 20000$  kPa a  $\nu = 0,49$ . Tyto hodnoty jsou typické pro zeminy, např. jíly. Drucker-Pragerovo kritérium (3.31) je dáno materiálovými parametry  $a$  a  $Y$ , které můžeme vypočítat pomocí koheze  $c_0 = 50$  kPa a úhlu vnitřního tření  $\varphi = 20^\circ$  následujícími vztahy:

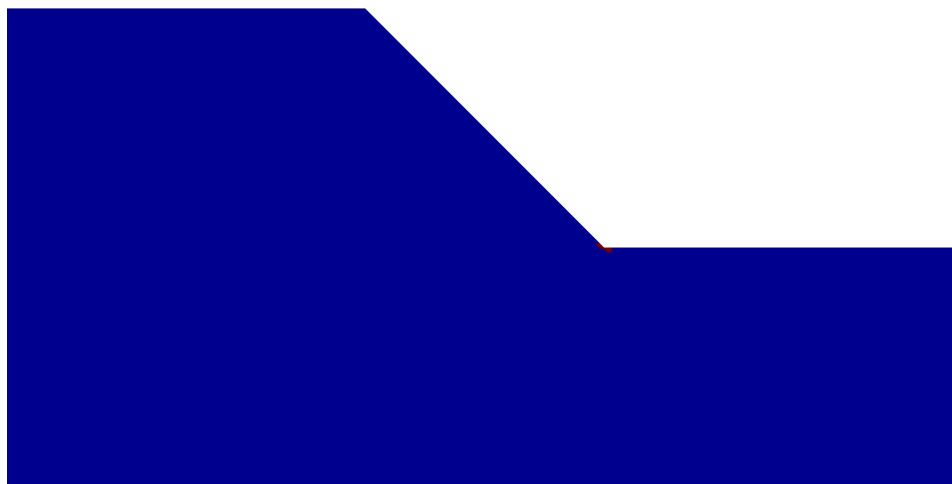
$$a = \frac{3\sqrt{2}\text{tg}(\varphi)}{\sqrt{9 + 12\text{tg}^2(\varphi)}} \quad Y = \frac{3c_0\sqrt{2}}{\sqrt{9 + 12\text{tg}^2(\varphi)}}.$$

**8.1. Experiment 1.** Při stabilitní analýze se objemové (případně povrchové) síly násobí různě velkými faktory zatížení a určuje se tak příslušný bezpečnostní faktor. My budeme volit hodnotu parametru zatížení  $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$  a uvažovat tak objemové síly  $\lambda F$ . Pro diskretizaci úlohy použijeme  $P_2$  elementy a 7-bodovou numerickou integraci. Výpočet provádíme v Matlabu pomocí vlastních kódů, které vycházejí z veřejně dostupných kódů [4]. Budeme uvažovat velmi jemnou a pravidelnou triangulaci oblasti, která obsahuje pravoúhlé a rovnoramenné trojúhelníky. Celkový počet uzlů je 154481, celkový počet elementů je 76800 a celkový počet integračních bodů je 537600.

$\lambda$	počet porušení kritéria
1	76
2	13900
3	51830
4	88760
5	110694

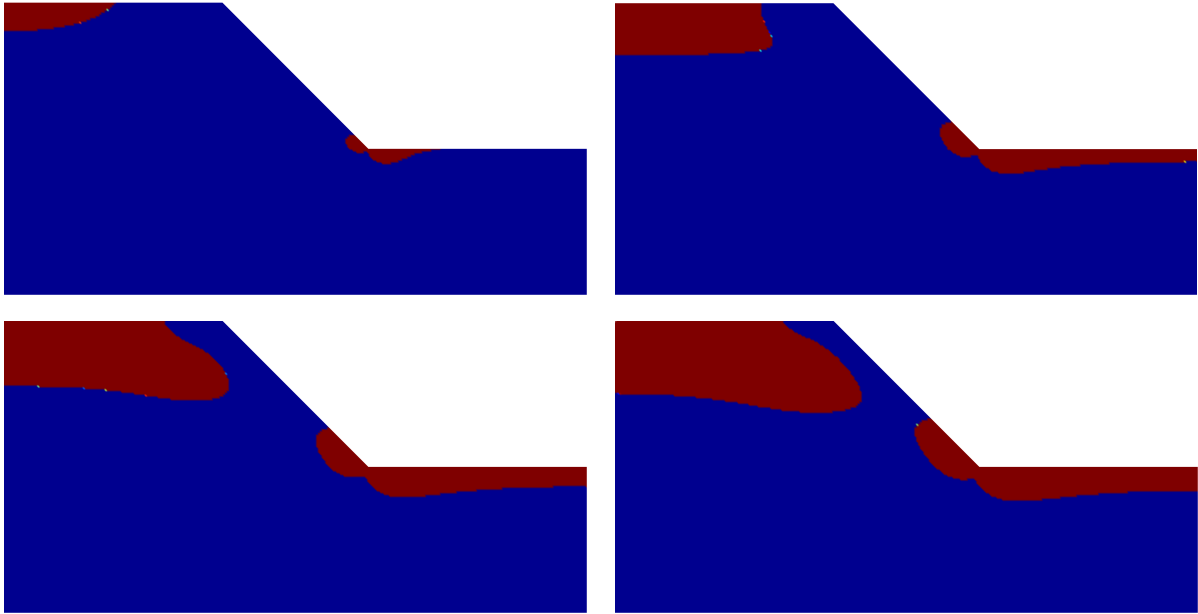
TABULKA 8.1. Počet integračních bodů, ve kterých dochází k porušení Drucker-Pragerova kritéria. Celkový počet integračních bodů je (537600).

V tabulce 8.1 můžeme pro jednotlivé  $\lambda$  vidět, v kolika integračních bodech bylo překročeno plastické kritérium. Vidíme, že k překročení kritéria dojde pro všechny zvolené hodnoty  $\lambda$ . Zóny poškození znázorňujeme tak, že transformujeme hodnoty plastického kritéria v integračních bodech do uzlových bodů pomocí vhodného průměrování. Tím docílíme kompaktních tvarů zón poškození. Je třeba poznamenat, že plastické kritérium je překročeno i v některých bodech mimo znázorněné zóny poškození.



OBRÁZEK 8.2. Zóna poškození (červeně) pro  $\lambda = 1$

Na Obrázku 8.2 můžeme vidět, že pro  $\lambda = 1$  došlo k překročení plastického kritéria v zanebatelném množství bodů v okolí paty svahu (označeno červeně).



OBRÁZEK 8.3. Zóny poškození (červeně) pro  $\lambda = 2, 3, 4, 5$

Na Obrázku 8.3 vidíme oblast poškození kritéria pro  $\lambda = 2$  (vlevo nahoře),  $\lambda = 3$  (vpravo nahoře),  $\lambda = 4$  (vlevo dole) a  $\lambda = 5$  (vpravo dole). Červenou barvou jsou znázorněny zóny poškození a modrou barvou jsou označeny zóny, kde k poškození nedochází. Z 8.3 je jasně vidět, že zóna možného poškození se s rostoucím  $\lambda$  zvětšuje.

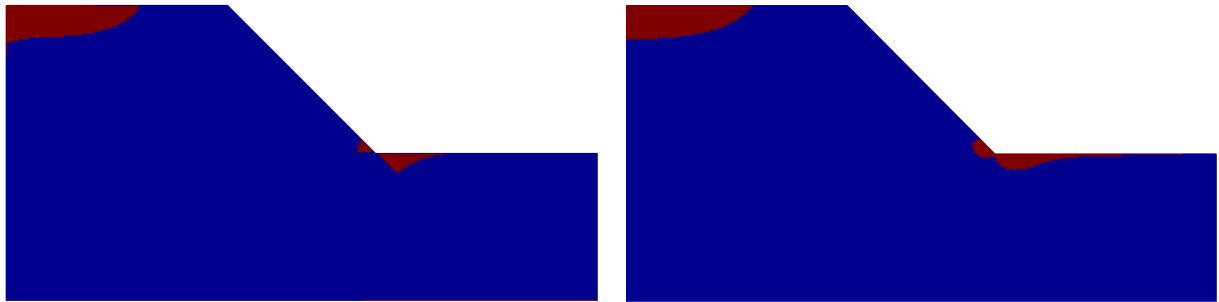
Poznamenejme, že zóny poškození by byly větší, kdybychom při výpočtu použili perfektně plastický model. Navíc pro tento model by úloha neměla řešení pro  $\lambda = 5$ , protože hodnota limitního parametru zatížení je zhruba 4.01, viz např. [6]. V okolí limitního zatížení je již možné pozorovat zóny, na které dojde k prokluzu svahu [6].

**8.2. Experiment 2.** Ve druhém experimentu se zaměříme na porovnání výsledků získaných různými typy konečných prvků. Konkrétně budeme pro porovnání uvažovat  $P_1$  elementy s 1-bodovou Gaussovou kvadraturou a  $P_2$  elementy se 7-bodovou Gaussovou kvadraturou. Uvažujme stejné zadání rozměrů a parametrů jako ze začátku 8. kapitoly, jedinou výjimkou bude parametr  $\nu$ , jehož hodnotu změníme na  $\nu = 0,4999$ . Kvůli zachování V-elasticity bilineární formy  $a$  musí být parametr  $\nu$  menší než 0,5. Pro  $P_1$  elementy může pro  $\nu$  blízké 0,5 docházet k takzvaným “locking“ efektům, proto se je v takovém případě nedoporučuje používat. Pro lepší grafické znázornění, použijeme parametr zatížení  $\lambda = 2$ , protože v případě  $\lambda = 1$  je oblast poškození velmi malá.

	$P_1$ element	$P_2$ element
počet uzlů	38841	154481
počet elementů	76800	76800
počet kvadraturních bodů	76800	537600
počet plastických integračních bodů	<b>35567</b>	<b>19494</b>

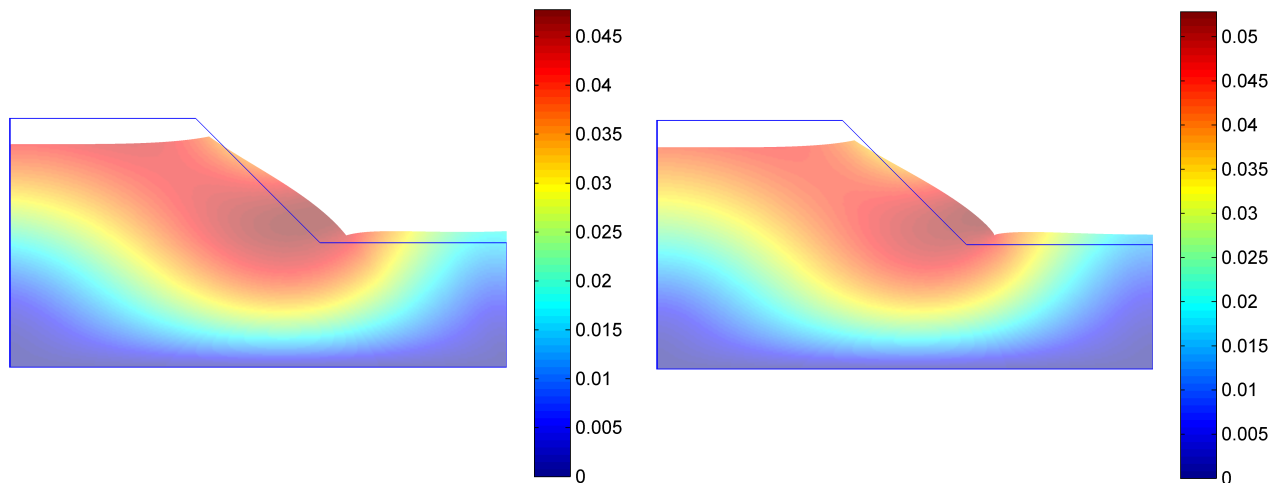
TABULKA 8.2. Počty plastických integračních bodů  $P_1$  a  $P_2$  elementů

V tabulce 8.2 můžeme vidět počty uzlů, elementů, kvadraturních bodů a plastických integračních bodů pro  $P_1$  a  $P_2$  elementy.



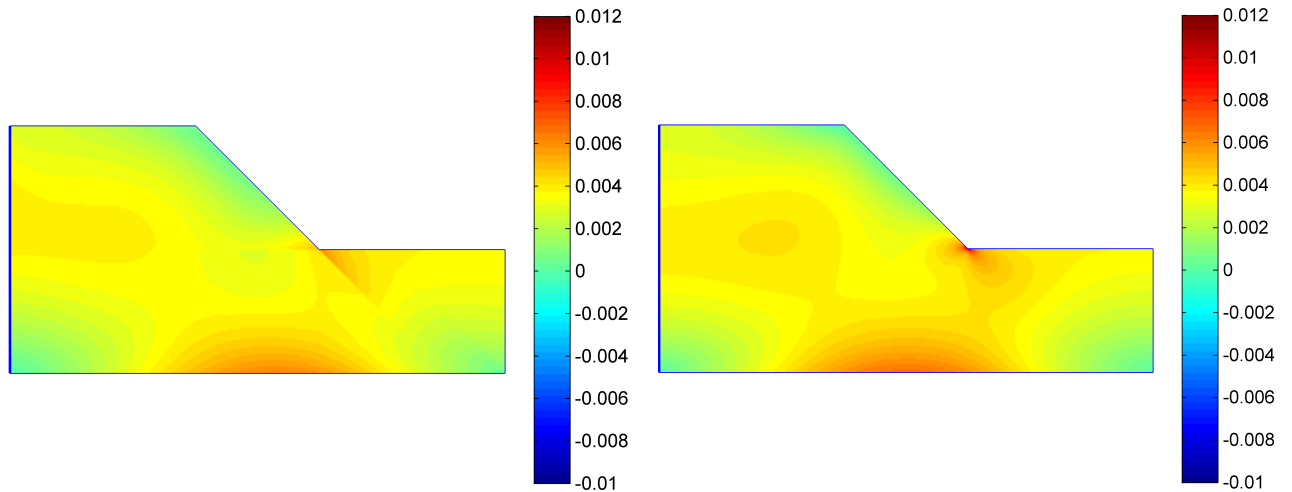
OBRÁZEK 8.4. Oblast poškození pro  $P_1$  elementy (vlevo) a  $P_2$  elementy (vpravo) s  $\lambda = 2$

Z Obrázku 8.4 pozorujeme rozdíl ve tvaru zóny poškození pro  $P_1$  a  $P_2$  prvky, ačkoliv pracujeme s velmi jemnou sítí. Tento rozdíl je navíc umocněn skutečností, že u  $P_1$  prvků je celkový počet plastických integračních bodů vyšší než u  $P_2$  prvků, jak je patrné z tabulky 8.2. Plastické integrační body u  $P_1$  prvků se častěji vyskytují i mimo vyznačené zóny poškození.

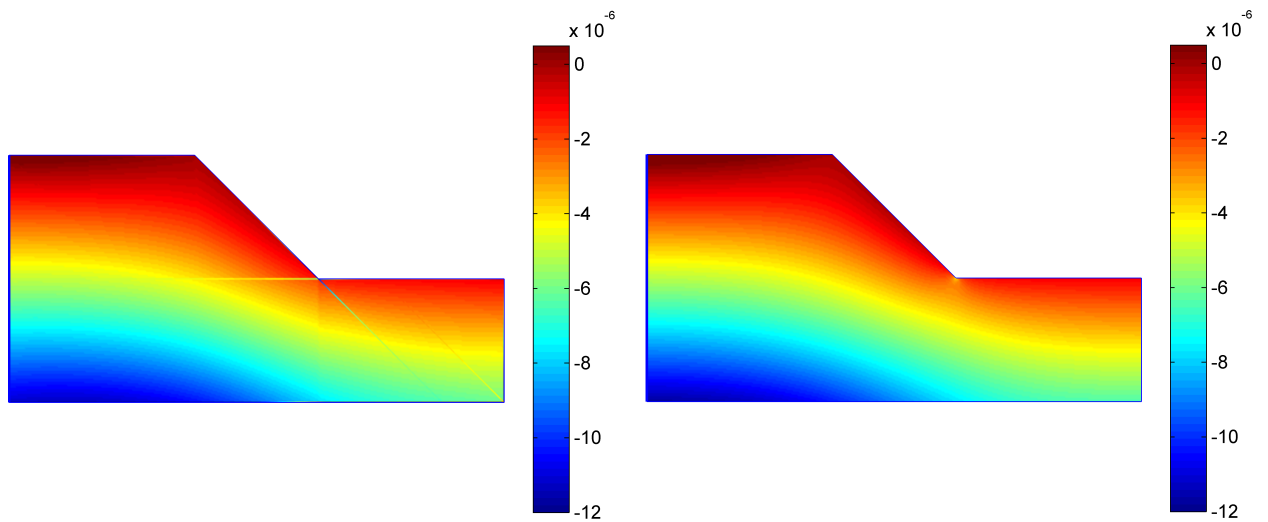


OBRÁZEK 8.5. Profil deformovaného svahu pro  $P_1$  elementy (vlevo) a  $P_2$  elementy (vpravo)

Na Obrázku 8.5 vidíme celkové posuny a deformovaný tvar svahu pro  $P_1$  a  $P_2$  elementy. Celkové posuny a deformace byly pro zdůraznění vynásobeny padesáti. Můžeme vidět, že rozdíl mezi  $P_1$  a  $P_2$  elementy je v tomto případě velmi malý.



OBRÁZEK 8.6. Porovnání deviatorických částí deformací pro  $P_1$  elementy (vlevo) a  $P_2$  elementy (vpravo)



OBRÁZEK 8.7. Porovnání volumetrických částí deformací pro  $P_1$  elementy (vlevo) a  $P_2$  elementy (vpravo)

Na obrázcích 8.6 a 8.7 můžeme vidět porovnání deviatorických, respektive volumetrických částí tenzorů malých deformací. Rozdíl mezi  $P_1$  a  $P_2$  elementy je zřetelný hlavně v okolí paty svahu, kde chování  $P_1$  prvků nevypadá příliš rozumně a je pravděpodobně způsobené tzv. locking efekty. Mohlo by to ilustrovat nevhodnost  $P_1$  prvků pro tento typ úlohy.

## 9. ZÁVĚR

Tato práce byla zaměřena na analýzu a řešení statických úloh lineární pružnosti a zjednodušené pružně-perfektní plasticity. V případě plastického modelu byly uvažovány von Misesovo a Drucker-Pragerovo kritéria poškození. Pro diskretizaci úloh byla užita metoda konečných prvků vyšších řádů. Úloha lineární pružnosti byla aplikována na modelovou úlohu znázorňující profil svahu ve 2D. Vypočítaný napěťový stav byl vyhodnocen pomocí Drucker-Pragerova kritéria, čímž byly získány zóny, ve kterých by mohlo dojít k porušení svahu. Byly také porovnány výsledky pro  $P_1$  a  $P_2$  konečné prvky pro téměř nestlačitelný jílový materiál, u kterého lze očekávat tzv. locking efekty způsobující špatnou konvergenci metody konečných prvků. Implementace byla provedena v Matlabu.

Z časových důvodů nedošlo k numerické realizaci pružně-plastického problému, což bylo součástí zadání diplomové práce. Na druhé straně, téma práce bylo poměrně komplexní. Mezi technicky nejnáročnější části patřilo odvození konstitutivních pružně-plastických operátorů, jejich potenciálů a derivací, a také numerická realizace konečných prvků vyššího řádu.



## LITERATURA

- [1] K.-J. Bathe: Finite Element Procedures. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [2] J. Bouchala: Variační Metody, <http://mi21.vsb.cz/>, 2012.
- [3] M. Čermák, S. Sysala, J. Valdman: Efficient and flexible MATLAB implementation of 2D and 3D elastoplastic problems. Applied Mathematics and Computation 355 (2019) 595-614. <https://arxiv.org/pdf/1805.04155.pdf>
- [4] M. Čermák, S. Sysala, J. Valdman: Fast MATLAB assembly of elastoplastic FEM matrices in 2D and 3D. Dostupné z: [https://github.com/matlabfem/matlab\\_fem\\_elastoplasticity](https://github.com/matlabfem/matlab_fem_elastoplasticity)
- [5] S. Fučík, A. Kufner: Nelineární diferenciální rovnice. SNTL, Praha, 1978.
- [6] J. Haslinger, S. Repin, S. Sysala: Inf-sup conditions on convex coens and applications to limit load analysis. Mathematics and Mechanics of Solids 24(10), 2019, 331-3353.
- [7] J. Nečas, I. Hlaváček: Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles. SNTL, Praha, 1983.
- [8] S. Sysala: Properties and simplifications of constitutive time-discretized elastoplastic operators. ZAMM 94 (2014) 233-255.
- [9] S. Sysala: Podklady k diplomové práci, 2018.  
Dostupné z: <https://drive.google.com/drive/folders/1FUTCvZDpsTbSxXW0OZlfX3Dpuv5p044y>
- [10] R. Temam: Mathematical problems in Plasticity. Gauthier-Villars, Paris, 1985.
- [11] The Ipe extensible drawing editor. Dostupné z: <http://ipe.otfried.org/>